This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Die

# combinatoriſche Analyſis

als

Vorbereitungslehre zum Studium

der

# theoretiſchen höhern Mathematik,

dargeſtellt

von

Andreas v. Ettingshauſen,

Profeſſor der höhern Mathematik an der k. k. Univerſität zu Wien.

Wien, 1826.

Druck und Verlag von J. B. Wallishauſſer.

182. f. 6.

Dem

wohlgebornen Herrn

# Franz Wilde,

Doctor der Philosophie und der freien Künste, Mitgliede der ökonomischen Gesellschaft in Krain, Vicedirector der philosophischen Studien, und derzeit Decan der philosophischen Facultät an der k. k. Universität zu Wien,

aus Dankbarkeit und Hochachtung

gewidmet

vom Verfasser.

# Vorrede.

Gegenwärtige Schrift, welche eine kurze Darstellung der Combinationslehre und ihrer vorzüglichsten Anwendungen auf Probleme des Calculs enthält, ist dazu bestimmt, Anfängern im Studium der Mathematik, welche die ersten Anfangsgründe dieser Wissenschaft nach der gewöhnlichen Lehrmethode sich angeeignet haben, und der sogenannten höhern Mathematik sich zuzuwenden gedenken, eine Gelegenheit zu verschaffen, ihre Einsicht in den Bau oder in das Gefüge der Resultate der arithmetischen Grundoperationen zu erweitern, um sodann, mit größerer Gewandtheit im Betrachten analytischer Formen ausgerüstet, das herrliche Gebiet der höhern Analysis betreten zu können.

Der Verfasser hatte hier vorzüglich das Bedürfniß jener jungen Freunde der Mathematik vor Augen, über welche sich sein Wirkungskreis zunächst erstreckt, und suchte einerseits Lücken zu ergänzen, welche in den ihm am häu-

figsten unter die Hände kommenden Lehrbüchern absichtlich gelassen wurden, andererseits aber der Theorie der Gleichungen vorzuarbeiten, die er in einer besonderen Schrift abzuhandeln Willens ist.

Kenner werden finden, daß der Verfasser die wenigen bis jetzt vorhandenen Originalwerke über die combinatorische Analysis benützt habe, ohne denselben sclavisch nachzubeten, und auch nur diesen allein wird es zustehen zu beurtheilen, in wie fern durch seine Arbeit der Wissenschaft selbst ein Scherflein zugewachsen sey.

Wien im August 1825.

# Inhalts-Anzeige.

## Erstes Kapitel.

### Vorbegriffe aus der Combinationslehre.

1. Erklärung der Begriffe Complexion, Element, Combiniren.
2. Erklärung der Combinationslehre.
3. Die zu combinirenden Elemente können was immer für Gegenstände seyn. Die Combinationslehre ist eine selbstständige Grundwissenschaft.
4. Die zu combinirenden Elemente werden am zweckmäßigsten durch Zahlen (Zeiger) vorgestellt.
5. Gleichheit der Elemente in combinatorischer Beziehung.
6. Rangordnung der Elemente.
7. Rangordnung der Complexionen.

Allgemeine Methode eine combinatorische Operation auszuführen.

8. Merkmale der niedrigsten Complexion, welche sich bei einer combinatorischen Operation ergibt. Verfahren aus jeder einzelnen Complexion die nächsthöhere abzuleiten.

Combinatorische Grundoperationen.

9. Sie sind das Permutiren, das Combiniren im engeren Sinne, und das Variiren.

Das Permutiren.

10. Definition dieser combinatorischen Operation. Permutationsform (Versetzung).
11. Verfahren zur Darstellung sämmtlicher Versetzungen gegebener Elemente.
12. Bestimmung der Anzahl der Permutationen: Erstens, wenn die Elemente sämmtlich von einander verschieden sind; zweitens, wenn darunter gleiche Elemente vorkommen.

13. Zusammenziehung der für beide Fälle geltenden Formeln in eine.
14. Ein arithmetischer Lehrsatz.

Von den Perioden der durch ein gemeinschaftliches Ableitungsgesetz verknüpften Permutationen ungleicher Elemente.

15. Wenn man aus einer Complexion ungleicher Elemente durch Veränderung der Ordnung, in welcher diese Elemente aufeinanderfolgen, eine zweite Complexion, ferner aus dieser nach demselben Gesetze eine dritte, und daraus wieder eine vierte ableitet u. s. w., so kömmt man, sobald sich verschiedene Complexionen zu zeigen aufhören, sogleich auf die Complexion zurück, von welcher man ausging.
16. Man erhält auf diese Art eine Periode von Permutationen. Symbolische Darstellung des der Periode zum Grunde liegenden Permutationsgesetzes.
17. Die Complexionen einer Periode bilden einen Cyklus.
18. Die Anzahl der Complexionen einer Periode ist stets ein Factor der Anzahl aller Versetzungen, welche die Elemente jeder einzelnen Complexion zulassen.
19. Eintheilung der zur Bildung einer Periode möglichen Permutationsgesetze in einfache und in zusammengesetzte.
20. Wie ein einfaches Permutationsgesetz entworfen wird.
21. Anzahl der Arten, auf welche aus einer gegebenen Complexion eine andere nach einem einfachen Permutationsgesetze erzeugt werden kann.
22. Wie man erkennt, ob eine Complexion mit einer andern durch ein einfaches Permutationsgesetz verknüpft ist, oder nicht.
23. Anzahl der Complexionen einer Periode für ein einfaches Permutationsgesetz.
24. Anzahl der Complexionen in einer durch ein zusammengesetztes Permutationsgesetz erzeugten Periode.
25. Wenn man aus einer Periode gleichweit von einander abstehende Complexionen heraushebt, indem man die erste und letzte Complexion als aneinandergrenzend betrachtet, so erhält man eine neue Periode.
26. Wie die Anzahl der Complexionen dieser neuen Periode aus jener der Complexionen in der ursprünglichen Periode berechnet wird.
27. Beschaffenheit des Permutationsgesetzes der neuen Periode.

28. Wenn aus einer Complexion eine zweite nach einem einfachen Permutationsgesetze abgeleitet worden ist, so läßt sich aus dieser eine dritte nach einem über die nämlichen Stellen, wie früher, sich erstreckenden einfachen Permutationsgesetze erzeugen, welche von der ersten Complexion nur in der Besetzung dreier beliebiger dieser Stellen abweicht.

Das Combiniren.

29. Definition des eigentlich so genannten Combinirens. Combinationsform, Combinationsklasse, Klassenexponent; besondere Namen der Combinationsklassen. Das Combiniren mit Wiederholungen.

30. Verfahren zur Darstellung sämmtlicher Combinationen gegebener Elemente zu einer bestimmten Klasse.

31. Anzahl der Combinationsformen einer gegebenen Menge von Elementen zu einer gegebenen Klasse: Erstens, wenn kein Element wiederholt wird; zweitens, wenn jedes Element unbeschränkt wiederholbar ist.

32. Zwei Combinationsklassen, deren Zeiger zusammen genommen die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente ausmachen, enthalten gleichviel Complexionen.

33. Anzahl der Combinationen, in welchen ein bestimmtes Element vorkommt.

34. Anzahl der Combinationen, in welchen ein bestimmtes Element nicht erscheint.

35. Ausdruck für die Anzahl der Combinationen einer bestimmten Elementenmenge durch Combinationszahlen, welche sich auf eine um 1 kleinere Elementenmenge beziehen.

36. Bestimmung der Anzahl der Arten, auf welche sich eine gegebene Menge von Elementen in mehrere Parthien so vertheilen läßt, daß jede Parthie eine festgesetzte Anzahl dieser Elemente erhält.

37. Andere Auflösung dieser Aufgabe mit Hülfe des Permutirens.

38. Anzahl der Arten, auf welche sich die Elemente mehrerer Reihen ungleicher Elemente in mehrere Parthien, deren jede eine bestimmte Menge von Elementen aus jeder einzelnen Reihe bekommen soll, vertheilen lassen.

39. Eine allgemeine Relation zwischen den numerischen Ausdrücken, auf welche die vorigen Aufgaben führen.

Das Combiniren zu bestimmten Summen.

40. Erklärung des Combinirens zu bestimmten Summen.

41. Verfahren zur Darſtellung aller möglichen Combinationsformen (mit Wiederholungen) zu einer beſtimmten Summe ohne Rückſicht auf den Unterſchied der Klaſſen.
42. Der Inbegriff der wohlgeordneten Combinationen zu einer beſtimmten Summe iſt eine Involution dieſer Combinationen zu allen niedrigern Summen.
43. Stufenweiſe Ableitung der Combinationen höherer Summen aus niedrigern.
44. Darſtellung einer einzelnen Combinationsklaſſe zu einer gegebenen Summe.
45. Die Combinationen zu einer beſtimmten Summe ohne Wiederholungen ſind in den entſprechenden Combinationen mit Wiederholungen enthalten.
46. Recurrirende Beſtimmung der Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen zu einer gegebenen Klaſſe und Summe.
47. Reduction der Anzahl aller möglichen Combinationen zu einer beſtimmten Summe auf die Anzahl der Complexionen einer einzelnen Combinationsklaſſe zu einer andern Summe.

Das Variiren.

48. Erklärung des Variirens. Variationsform.
49. Darſtellung aller Variationen gegebener Reihen von Elementen und Beſtimmung ihrer Anzahl.
50. Reduction des Variirens auf das Combiniren und Permutiren der Zeiger der Elemente. Das Variiren zu einer beſtimmten Summe.

## Zweites Kapitel.

### Erklärung einiger arithmetiſch-combinatoriſcher Zeichen.

51. Bei allen folgenden combinatoriſchen Operationen ſind die Complexionen Producte der Elemente und die Inbegriffe der Complexionen Summen derſelben. Erklärung der Zeichen C, Cw, V.
52. Reduction der Variationen identiſcher Elementenreihen auf Combinationen mit Wiederholungen. Erklärung des Zeichens pCw.
53. Relationen zwiſchen den vollſtändigen und unvollſtändigen Combinationsklaſſen. Bedeutung der Zeichen $C_0$ und $Cw_0$.
54. Erklärung eines combinatoriſchen Aggregates. Allgemeines Glied und veränderliche Größen. Beſondere Art der hier zu betrachtenden combinatoriſchen Aggregate und ihre Bezeichnung. Einige Sätze über dieſe combinatoriſchen Aggregate.

56. Abgekürzte Bezeichnung der combinatoriſchen Aggregate mit einer veränderlichen Größe, ſtatt welcher die natürlichen Zahlen zu ſetzen ſind.
57. Reductionen, welche ſich auf dieſe Bezeichnung gründen.
58. Dieſelbe Bezeichnung kann oft auch auf combinatoriſche Aggregate mit mehreren veränderlichen Größen ausgedehnt werden. Transformationen ſolcher Aggregate durch Verwechslung der Summenzeichen.
59. Wie Inbegriffe von Combinationen mit Wiederholungen durch combinatoriſche Aggregate dargeſtellt werden.

## Drittes Kapitel.

### Arithmetik der Polynome.

60. Die Combinationslehre verhilft zu independenten Auflöſungen der Hauptprobleme der Arithmetik polynomiſcher Größen.
61. Beſchaffenheit der hier zu betrachtenden Polynome.

### Multiplication der Polynome.

62. Multiplication ſolcher Polynome, die nicht nach den Potenzen einer Hauptgröße geordnet ſind.
63. Multiplicationsformel für geordnete Polynome.
64. Formel für das Product zweier geordneter Polynome insbeſondere.
65. Entwickelung der Producte $(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\ldots$ und $(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)\ldots$
66. Summirung aller Combinationsklaſſen gegebener nicht wiederholbarer Elemente, und Anwendung derſelben auf die Beſtimmung der Anzahl aller Diviſoren einer ganzen Zahl, deren einfache Factoren bekannt ſind.
67. Entwickelung des Quotienten $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots}$.

### Potenzirung der Polynome für ganze poſitive Exponenten.

68. Potenzirung eines Polynoms, deſſen Glieder nicht nach den Potenzen einer Hauptgröße fortſchreiten. (Polynomialformel).
69. Andere Geſtalten dieſer Polynomialformel.
70. Potenzirung der Polynome, welche nach den Potenzen einer Hauptgröße geordnet ſind.
71. Andere Geſtalt der Potenzirungsformel für geordnete Polynome.
72. Bemerkungen über den Umfang der darin vorkommenden combinatoriſchen Aggregate.

73. Die in 71 gegebene Form des polynomiſchen Lehrſatzes für geordnete Polynome läßt ſich auch auf die Potenzirungsformel für nicht geordnete Polynome übertragen.

Potenzirung der Polynome für jeden Exponenten.

74. Unterſuchung, für welche der früher gegebenen Potenzirungsformeln eine Ausdehnung auf andere, als ganze poſitive Exponenten möglich ſeyn dürfte.

75. 76. Eigenſchaften der Größe $\binom{n}{k}$ für jeden Werth von n.

77. Multiplication der Polynomialformeln für jeden Werth des Exponenten, als Vorbereitung zum Beweiſe der Allgemeinheit des polynomiſchen Lehrſatzes.

78. Der polynomiſche Satz gilt für commenſurable gebrochene und negative Exponenten.

79. Er gilt auch für incommenſurable Exponenten.

80. 81. Eigenſchaften der Polynomial-Coefficienten.

82. Recurrirende Form des polynomiſchen Lehrſatzes.

83. Allgemeinere Relationen zwiſchen den Polynomial-Coefficienten.

84. Die Umkehrung der Reihen.

85. Beiſpiele über den Gebrauch der Umkehrungsformel.

Beſondere Fälle des polynomiſchen Lehrſatzes.

a) Der binomiſche Lehrſatz.

86. Ableitung des binomiſchen Lehrſatzes aus dem polynomiſchen.

87. Verfahren, den binomiſchen Lehrſatz unmittelbar auf dem kürzeſten Wege darzuſtellen.

88. Regel für die Potenzirung eines Binoms. Beiſpiele.

89. Binomial-Coefficienten und ihre Formen für verſchiedene Werthe der Exponenten.

90. Methode eine Tabelle über die Binomial-Coefficienten zu entwerfen.

91. Summirung der erſten und der zweiten Potenzen der Binomial-Coefficienten.

92. 93. Summirung der mit wechſelnden Zeichen genommenen Binomial-Coefficienten.

94. Eine allgemeine Relation zwiſchen den Polynomial-Coefficienten.

95. Der binomiſche Lehrſatz kann zur näherungsweiſen Ausziehung der Wurzeln gebraucht werden.

96. Erklärung der Convergenz und der Divergenz einer Reihe.

97. Jede convergirende Reihe iſt eine fallende, aber nicht jede fallende Reihe iſt eine convergirende.

98. Convergenz einer geometrischen Progression.
99. Ein Mittel zur Beurtheilung der Convergenz einer Reihe.
100. Eine convergirende Reihe für $\sqrt[n]{N}$.

b) Division der Polynome.

101. Entwickelung des Quotienten, welcher aus der Division der Einheit durch ein nach einer Hauptgröße geordnetes Polynom entspringt.
102. Quotient zweier nach einerlei Hauptgröße mit einerlei Differenz ihrer Exponenten fortschreitender Polynome.
103. Besonderer Fall, in welchem dieser Quotient auf eine einfachere Form gebracht werden kann.
104. Recurrirendes Verfahren zur Bestimmung dieses Quotienten.
105. Bestimmung zweier Polynome, durch deren Division ein gegebenes nach einer Hauptgröße geordnetes Polynom erzeugt wird.

## Viertes Kapitel.

### Entwickelung der Exponentialgrößen.

106. Nähere Angabe des Gegenstandes dieses Kapitels.
107. Umstaltung der Exponentialgröße $B^z$ in eine nach den Potenzen von z fortschreitende Reihe.
108 Transformationen der in dieser Reihe vorkommenden Coefficienten der Hauptgröße.
109. Summirung einer gegebenen Combinationsklasse der natürlichen Zahlen ohne Wiederholungen.
110. Summirung einer gegebenen Combinationsklasse der natürlichen Zahlen mit Wiederholungen.
111. Berechnung des ersten Gliedes einer beliebigen Differenzreihe, wenn die Hauptreihe gegeben ist.
112. Andere Formel für die Summe einer Combinationsklasse der natürlichen Zahlen mit Wiederholungen.
113. Entwickelung der Exponential-Größe $B^z$ wenn z ein nach den Potenzen einer Hauptgröße x geordnetes Polynom vorstellt.
114. Besonderer Fall, in welchem die Coefficienten dieser Entwickelung aus einer einfachen Recursionsformel hervorgehen.
115. Betrachtung der Größe $e = \sum_{0}^{v} \frac{1}{v!}$.
116. Das natürliche und die künstlichen Logarithmensysteme.
117. Reihen zur Berechnung der natürlichen Logarithmen gegebener Zahlen.

118. Logarithmus eines nach einer Hauptgröße geordneten Polynoms.
119. Entwickelung der Exponential-Größen ohne Hülfe des polynomischen Lehrsatzes. Ableitung der Grundreihe für die natürlichen Logarithmen aus der Reihe für die Exponential-Größen. Uebergang auf den binomischen und polynomischen Lehrsatz.
120. Umkehrung der Reihe $y^m = \mathfrak{S}_0^r \frac{x^{h+rt}}{r!}$

## Fünftes Kapitel.

### Ableitung einiger Reihen für goniometrische Größen.

121. Ausdruck für die imaginäre Größe $e^{x\sqrt{-1}}$, wobei e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und x eine reelle Größe anzeigt.
122. Relationen zwischen den Bestandtheilen dieses Ausdruckes.
123. 124. Goniometrische Bedeutung dieser Bestandtheile. Entwickelung des Sinus und des Cosinus nach den Potenzen des Bogens.
125. Entwickelung der Tangente und Cotangente nach den Potenzen des zugehörigen Bogens.
126. Ausdrücke eines Bogens durch seine Tangente.
127. Entwickelung eines Bogens nach den Potenzen seines Sinus.
128. Die goniometrische Binomialformel. Vorsicht bei dem Gebrauche derselben.
129. Ausdrücke für den Sinus und für den Cosinus eines vielfachen Bogens durch den Sinus und Cosinus des einfachen.
130 — 134. Reihen für den Sinus und Cosinus eines vielfachen Bogens, geordnet nach den Potenzen des Cosinus des einfachen Bogens.
135. Die Substitution von Reihen in Reihen kann auf unvollständige Resultate führen.
136. 137. Ausdrücke für sin n x und für cos n x durch sin x.
138. Umstaltung der nach steigenden Potenzen geordneten Entwickelungen von sin n x und cos n x in solche, die nach fallenden Potenzen fortschreiten, und umgekehrt.
139. Ausdruck für die Potenzen des Cosinus eines Bogens durch Cosinusse der Vielfachen dieses Bogens.
140. Ausdrücke für die Potenzen des Sinus eines Bogens durch Sinusse oder Cosinusse der Vielfachen dieses Bogens.

## Sechstes Kapitel.

### Von den Facultäten.

141. Erklärung einer Facultät. Bezeichnung derselben.

142. Reduction einer Facultät auf eine andere mit beliebiger Grundzahl oder mit beliebiger Differenz.
143. Zweifache Ansicht einer und derselben Facultät. Zerfällung einer Facultät in ein Product anderer Facultäten.
144. Bedeutung der Facultäten mit negativen und mit gebrochenen Exponenten.
145. Reduction der Facultäten mit ganzen positiven Exponenten auf Binomial-Coefficienten.

Der binomische und polynomische Lehrsatz für Facultäten.

146. Binomialformel für Facultäten mit ganzen positiven Exponenten.
147. Binomialformel für Facultäten mit ganzen negativen Exponenten.
148. Polynomialformel für Facultäten.

Entwickelung der Facultäten nach Potenzen der Grundzahl und der Differenz.

149. Entwickelung der Facultäten mit ganzen positiven Exponenten.
150. Ueber die Berechnung der dieser Entwickelung zum Grunde liegenden, vom Exponenten der Facultät abhängenden Coefficienten.
151. Entwickelung der Facultäten mit ganzen negativen Exponenten.
152. Berechnung der dabei vorkommenden Coefficienten.
153. 154. Zusammenstellung beider Entwickelungen unter eine gemeinschaftliche Form, und Ableitung der zwischen den Coefficienten derselben bestehenden Recursionen.

Entwickelung der Potenzen nach Facultäten mit einer beliebigen Differenz.

155. Die Behandlung dieser Entwickelung ist der Umkehrung der Reihen analog.
156. Reduction der hier vorkommenden Coefficienten auf die bei den früheren Entwickelungen erhaltenen.
157. Summirung gleichnamiger Potenzen der Glieder einer arithmetischen Progression durch Facultäten. Anwendung auf die Summirung gleichnamiger Potenzen der natürlichen Zahlen mit ganzen positiven Exponenten.

## Siebentes Kapitel.

### Eigenschaften der algebraischen Ausdrücke in Bezug auf die gegenseitige Vertauschung darin vorkommender unbestimmter Größen.

158. Eintheilung der algebraischen Ausdrücke in symmetrische und in unsymmetrische.

159. Die symmetrischen Ausdrücke sind entweder einfache oder zusammengesetzte.
160. Bildung eines einfachen symmetrischen Ausdruckes, dessen Glieder Producte beliebiger Potenzen der Grundgrößen sind.
161. Anzahl der Glieder eines solchen symmetrischen Ausdruckes.
162. Die Anzahl der verschiedenen Formen, welche ein unsymmetrischer auf n Größen sich beziehender Ausdruck bei allen Permutationen dieser Größen anzunehmen vermag, ist nicht größer, als die Permutationszahl n!
163. Sie ist stets ein Theiler von n!
164. Sie kann nie kleiner seyn, als die größte n nicht übersteigende Primzahl ohne = 2 zu werden.
165. Oder allgemeiner: Sie kann nie kleiner seyn, als das Product ungleicher, von der Einheit verschiedener Primzahlen, deren Summe n nicht übersteigt, ohne = 2 zu werden.

## Achtes Kapitel.

### Zusammenhang einer besondern Klasse symmetrischer Polynome mit den Combinationen ihrer Grundgrößen.

166. Bezeichnung der hier zu betrachtenden symmetrischen Ausdrücke.
167. Recurrirende Reduction der Summe gleichnamiger Potenzen mehrerer Größen für einen ganzen positiven Exponenten auf die Combinationen dieser Größen.
168. Auflösung derselben Aufgabe für einen ganzen negativen Exponenten.
169. Independente Behandlung beider Fälle.
170. Recurrirende und independente Reduction einer Combinationsklasse beliebiger Größen ohne Wiederholungen auf Potenzensummen derselben.
171. Recurrirende Reduction eines einfachen symmetrischen Ausdruckes, dessen Glieder Producte verschiedener Potenzen der Grundgrößen mit ganzen Exponenten sind, auf Potenzensummen dieser Größen.
172. 173. Auflösung dieser Aufgabe, wenn der symmetrische Ausdruck mehrere Potenzen der Grundgrößen mit gleichen Exponenten enthält.
174. 175. Independente Auflösung der vorigen Aufgaben.
176. Reduction einer bestimmten Combinationsklasse der Quadrate gegebener Größen ohne Wiederholungen auf die Combinationsklassen der einfachen Größen.

# Erſtes Kapitel.

## Vorbegriffe aus der Combinationslehre.

1.

Alles, was im Nebeneinanderſeyn oder im Aufeinanderfolgen als zuſammengehörig betrachtet wird, bildet eine Gruppe oder Complexion. Jeder einzelne Beſtandtheil einer Gruppe wird ein Element derſelben genannt. Aus gegebenen Elementen Gruppen zuſammenſetzen, heißt combiniren im weiteſten Sinne des Wortes.

So bilden z. B. die fünf Nummern, welche im gewöhnlichen Lottoſpiele bei jeder Ziehung aus 90 Nummern herausgehoben werden, eine Gruppe; jede dieſer Nummern iſt ein Element der Gruppe; man combinirt, wenn man die verſchiedenen Arten darſtellt, auf welche jedesmal fünf andere Nummern gezogen werden können.

2.

Die Combinationslehre beſchäftiget ſich mit der Darſtellung aller Complexionen, welche aus gegebenen Elementen, unter vorgeſchriebenen Bedingungen, gebildet werden können.

3.

Die zu combinirenden Elemente können was immer für gleichartige oder ungleichartige Gegenſtände ſeyn, als: Perſonen, Farben, Buchſtaben, Sylben, Wörter, Zahlen u. d. gl.

13. Zusammenziehung der für beide Fälle geltenden Formeln in eine.
14. Ein arithmetischer Lehrsatz.

Von den Perioden der durch ein gemeinschaftliches Ableitungsgesetz verknüpften Permutationen ungleicher Elemente.

15. Wenn man aus einer Complexion ungleicher Elemente durch Veränderung der Ordnung, in welcher diese Elemente aufeinanderfolgen, eine zweite Complexion, ferner aus dieser nach demselben Gesetze eine dritte, und daraus wieder eine vierte ableitet u. s. w., so kömmt man, sobald sich verschiedene Complexionen zu zeigen aufhören, sogleich auf die Complexion zurück, von welcher man ausging.
16. Man erhält auf diese Art eine Periode von Permutationen. Symbolische Darstellung des der Periode zum Grunde liegenden Permutationsgesetzes.
17. Die Complexionen einer Periode bilden einen Cyklus.
18. Die Anzahl der Complexionen einer Periode ist stets ein Factor der Anzahl aller Versetzungen, welche die Elemente jeder einzelnen Complexion zulassen.
19. Eintheilung der zur Bildung einer Periode möglichen Permutationsgesetze in einfache und in zusammengesetzte.
20. Wie ein einfaches Permutationsgesetz entworfen wird.
21. Anzahl der Arten, auf welche aus einer gegebenen Complexion eine andere nach einem einfachen Permutationsgesetze erzeugt werden kann.
22. Wie man erkennt, ob eine Complexion mit einer andern durch ein einfaches Permutationsgesetz verknüpft ist, oder nicht.
23. Anzahl der Complexionen einer Periode für ein einfaches Permutationsgesetz.
24. Anzahl der Complexionen in einer durch ein zusammengesetztes Permutationsgesetz erzeugten Periode.
25. Wenn man aus einer Periode gleichweit von einander abstehende Complexionen heraushebt, indem man die erste und letzte Complexion als aneinandergrenzend betrachtet, so erhält man eine neue Periode.
26. Wie die Anzahl der Complexionen dieser neuen Periode aus jener der Complexionen in der ursprünglichen Periode berechnet wird.
27. Beschaffenheit des Permutationsgesetzes der neuen Periode.

28. Wenn aus einer Complexion eine zweite nach einem einfachen Permutationsgesetze abgeleitet worden ist, so läßt sich aus dieser eine dritte nach einem über die nämlichen Stellen, wie früher, sich erstreckenden einfachen Permutationsgesetze erzeugen, welche von der ersten Complexion nur in der Besetzung dreier beliebiger dieser Stellen abweicht.

Das Combiniren.

29. Definition des eigentlich so genannten Combinirens. Combinationsform, Combinationsklasse, Klassenexponent; besondere Namen der Combinationsklassen. Das Combiniren mit Wiederholungen.

30. Verfahren zur Darstellung sämmtlicher Combinationen gegebener Elemente zu einer bestimmten Klasse.

31. Anzahl der Combinationsformen einer gegebenen Menge von Elementen zu einer gegebenen Klasse: Erstens, wenn kein Element wiederholt wird; zweitens, wenn jedes Element unbeschränkt wiederholbar ist.

32. Zwei Combinationsklassen, deren Zeiger zusammen genommen die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente ausmachen, enthalten gleichviel Complexionen.

33. Anzahl der Combinationen, in welchen ein bestimmtes Element vorkommt.

34. Anzahl der Combinationen, in welchen ein bestimmtes Element nicht erscheint.

35. Ausdruck für die Anzahl der Combinationen einer bestimmten Elementenmenge durch Combinationszahlen, welche sich auf eine um 1 kleinere Elementenmenge beziehen.

36. Bestimmung der Anzahl der Arten, auf welche sich eine gegebene Menge von Elementen in mehrere Parthien so vertheilen läßt, daß jede Parthie eine festgesetzte Anzahl dieser Elemente erhält.

37. Andere Auflösung dieser Aufgabe mit Hülfe des Permutirens.

38. Anzahl der Arten, auf welche sich die Elemente mehrerer Reihen ungleicher Elemente in mehrere Parthien, deren jede eine bestimmte Menge von Elementen aus jeder einzelnen Reihe bekommen soll, vertheilen lassen.

39. Eine allgemeine Relation zwischen den numerischen Ausdrücken, auf welche die vorigen Aufgaben führen.

Das Combiniren zu bestimmten Summen.

40. Erklärung des Combinirens zu bestimmten Summen.

41. Verfahren zur Darſtellung aller möglichen Combinationsformen (mit Wiederholungen) zu einer beſtimmten Summe ohne Rückſicht auf den Unterſchied der Klaſſen.
42. Der Inbegriff der wohlgeordneten Combinationen zu einer beſtimmten Summe iſt eine Involution dieſer Combinationen zu allen niedrigern Summen.
43. Stufenweiſe Ableitung der Combinationen höherer Summen aus niedrigern.
44. Darſtellung einer einzelnen Combinationsklaſſe zu einer gegebenen Summe.
45. Die Combinationen zu einer beſtimmten Summe ohne Wiederholungen ſind in den entſprechenden Combinationen mit Wiederholungen enthalten.
46. Recurrirende Beſtimmung der Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen zu einer gegebenen Klaſſe und Summe.
47. Reduction der Anzahl aller möglichen Combinationen zu einer beſtimmten Summe auf die Anzahl der Complexionen einer einzelnen Combinationsklaſſe zu einer andern Summe.

Das Variiren.

48. Erklärung des Variirens. Variationsform.
49. Darſtellung aller Variationen gegebener Reihen von Elementen und Beſtimmung ihrer Anzahl.
50. Reduction des Variirens auf das Combiniren und Permutiren der Zeiger der Elemente. Das Variiren zu einer beſtimmten Summe.

## Zweites Kapitel.

### Erklärung einiger arithmetiſch-combinatoriſcher Zeichen.

51. Bei allen folgenden combinatoriſchen Operationen ſind die Complexionen Producte der Elemente und die Inbegriffe der Complexionen Summen derſelben. Erklärung der Zeichen C, Cw, V.
52. Reduction der Variationen identiſcher Elementenreihen auf Combinationen mit Wiederholungen. Erklärung des Zeichens pCw.
53. Relationen zwiſchen den vollſtändigen und unvollſtändigen Combinationsklaſſen. Bedeutung der Zeichen $C_0$ und $Cw_0$.
54. Erklärung eines combinatoriſchen Aggregates. Allgemeines Glied und veränderliche Größen. Beſondere Art der hier zu betrachtenden combinatoriſchen Aggregate und ihre Bezeichnung.
55. Einige Sätze über dieſe combinatoriſchen Aggregate.

56. Abgekürzte Bezeichnung der combinatoriſchen Aggregate mit einer veränderlichen Größe, ſtatt welcher die natürlichen Zahlen zu ſetzen ſind.
57. Reductionen, welche ſich auf dieſe Bezeichnung gründen.
58. Dieſelbe Bezeichnung kann oft auch auf combinatoriſche Aggregate mit mehreren veränderlichen Größen ausgedehnt werden. Transformationen ſolcher Aggregate durch Verwechslung der Summenzeichen.
59. Wie Inbegriffe von Combinationen mit Wiederholungen durch combinatoriſche Aggregate dargeſtellt werden.

## Drittes Kapitel.

### Arithmetik der Polynome.

60. Die Combinationslehre verhilft zu independenten Auflöſungen der Hauptprobleme der Arithmetik polynomiſcher Größen.
61. Beſchaffenheit der hier zu betrachtenden Polynome.

### Multiplication der Polynome.

62. Multiplication ſolcher Polynome, die nicht nach den Potenzen einer Hauptgröße geordnet ſind.
63. Multiplicationsformel für geordnete Polynome.
64. Formel für das Product zweier geordneter Polynome insbeſondere.
65. Entwickelung der Producte $(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\ldots$ und $(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)\ldots$
66. Summirung aller Combinationsklaſſen gegebener nicht wiederholbarer Elemente, und Anwendung derſelben auf die Beſtimmung der Anzahl aller Diviſoren einer ganzen Zahl, deren einfache Factoren bekannt ſind.
67. Entwickelung des Quotienten $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots}$

### Potenzirung der Polynome für ganze poſitive Exponenten.

68. Potenzirung eines Polynoms, deſſen Glieder nicht nach den Potenzen einer Hauptgröße fortſchreiten. (Polynomialformel).
69. Andere Geſtalten dieſer Polynomialformel.
70. Potenzirung der Polynome, welche nach den Potenzen einer Hauptgröße geordnet ſind.
71. Andere Geſtalt der Potenzirungsformel für geordnete Polynome.
72. Bemerkungen über den Umfang der darin vorkommenden combinatoriſchen Aggregate.

13. Zusammenziehung der für beide Fälle geltenden Formeln in eine.
14. Ein arithmetischer Lehrsatz.

Von den Perioden der durch ein gemeinschaftliches Ableitungsgesetz verknüpften Permutationen ungleicher Elemente.

15. Wenn man aus einer Complexion ungleicher Elemente durch Veränderung der Ordnung, in welcher diese Elemente aufeinanderfolgen, eine zweite Complexion, ferner aus dieser nach demselben Gesetze eine dritte, und daraus wieder eine vierte ableitet u. s. w., so kömmt man, sobald sich verschiedene Complexionen zu zeigen aufhören, sogleich auf die Complexion zurück, von welcher man ausging.
16. Man erhält auf diese Art eine Periode von Permutationen. Symbolische Darstellung des der Periode zum Grunde liegenden Permutationsgesetzes.
17. Die Complexionen einer Periode bilden einen Cyklus.
18. Die Anzahl der Complexionen einer Periode ist stets ein Factor der Anzahl aller Versetzungen, welche die Elemente jeder einzelnen Complexion zulassen.
19. Eintheilung der zur Bildung einer Periode möglichen Permutationsgesetze in einfache und in zusammengesetzte.
20. Wie ein einfaches Permutationsgesetz entworfen wird.
21. Anzahl der Arten, auf welche aus einer gegebenen Complexion eine andere nach einem einfachen Permutationsgesetze erzeugt werden kann.
22. Wie man erkennt, ob eine Complexion mit einer andern durch ein einfaches Permutationsgesetz verknüpft ist, oder nicht.
23. Anzahl der Complexionen einer Periode für ein einfaches Permutationsgesetz.
24. Anzahl der Complexionen in einer durch ein zusammengesetztes Permutationsgesetz erzeugten Periode.
25. Wenn man aus einer Periode gleichweit von einander abstehende Complexionen heraushebt, indem man die erste und letzte Complexion als aneinandergrenzend betrachtet, so erhält man eine neue Periode.
26. Wie die Anzahl der Complexionen dieser neuen Periode aus jener der Complexionen in der ursprünglichen Periode berechnet wird.
27. Beschaffenheit des Permutationsgesetzes der neuen Periode.

28. Wenn aus einer Complexion eine zweite nach einem einfachen Permutationsgesetze abgeleitet worden ist, so läßt sich aus dieser eine dritte nach einem über die nämlichen Stellen, wie früher, sich erstreckenden einfachen Permutationsgesetze erzeugen, welche von der ersten Complexion nur in der Besetzung dreier beliebiger dieser Stellen abweicht.

Das Combiniren.

29. Definition des eigentlich so genannten Combinirens. Combinationsform, Combinationsklasse, Klassenexponent; besondere Namen der Combinationsklassen. Das Combiniren mit Wiederholungen.

30. Verfahren zur Darstellung sämmtlicher Combinationen gegebener Elemente zu einer bestimmten Klasse.

31. Anzahl der Combinationsformen einer gegebenen Menge von Elementen zu einer gegebenen Klasse: Erstens, wenn kein Element wiederholt wird; zweitens, wenn jedes Element unbeschränkt wiederholbar ist.

32. Zwei Combinationsklassen, deren Zeiger zusammen genommen die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente ausmachen, enthalten gleichviel Complexionen.

33. Anzahl der Combinationen, in welchen ein bestimmtes Element vorkommt.

34. Anzahl der Combinationen, in welchen ein bestimmtes Element nicht erscheint.

35. Ausdruck für die Anzahl der Combinationen einer bestimmten Elementenmenge durch Combinationszahlen, welche sich auf eine um 1 kleinere Elementenmenge beziehen.

36. Bestimmung der Anzahl der Arten, auf welche sich eine gegebene Menge von Elementen in mehrere Parthien so vertheilen läßt, daß jede Parthie eine festgesetzte Anzahl dieser Elemente erhält.

37. Andere Auflösung dieser Aufgabe mit Hülfe des Permutirens.

38. Anzahl der Arten, auf welche sich die Elemente mehrerer Reihen ungleicher Elemente in mehrere Parthien, deren jede eine bestimmte Menge von Elementen aus jeder einzelnen Reihe bekommen soll, vertheilen lassen.

39. Eine allgemeine Relation zwischen den numerischen Ausdrücken, auf welche die vorigen Aufgaben führen.

Das Combiniren zu bestimmten Summen.

40. Erklärung des Combinirens zu bestimmten Summen.

41. Verfahren zur Darstellung aller möglichen Combinationsformen (mit Wiederholungen) zu einer bestimmten Summe ohne Rücksicht auf den Unterschied der Klassen.
42. Der Inbegriff der wohlgeordneten Combinationen zu einer bestimmten Summe ist eine Involution dieser Combinationen zu allen niedrigern Summen.
43. Stufenweise Ableitung der Combinationen höherer Summen aus niedrigern.
44. Darstellung einer einzelnen Combinationsklasse zu einer gegebenen Summe.
45. Die Combinationen zu einer bestimmten Summe ohne Wiederholungen sind in den entsprechenden Combinationen mit Wiederholungen enthalten.
46. Recurrirende Bestimmung der Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen zu einer gegebenen Klasse und Summe.
47. Reduction der Anzahl aller möglichen Combinationen zu einer bestimmten Summe auf die Anzahl der Complexionen einer einzelnen Combinationsklasse zu einer andern Summe.

Das Variiren.

48. Erklärung des Variirens. Variationsform.
49. Darstellung aller Variationen gegebener Reihen von Elementen und Bestimmung ihrer Anzahl.
50. Reduction des Variirens auf das Combiniren und Permutiren der Zeiger der Elemente. Das Variiren zu einer bestimmten Summe.

## Zweites Kapitel.

### Erklärung einiger arithmetisch-combinatorischer Zeichen.

51. Bei allen folgenden combinatorischen Operationen sind die Complexionen Producte der Elemente und die Inbegriffe der Complexionen Summen derselben. Erklärung der Zeichen C, Cw, V.
52. Reduction der Variationen identischer Elementenreihen auf Combinationen mit Wiederholungen. Erklärung des Zeichens pCw.
53. Relationen zwischen den vollständigen und unvollständigen Combinationsklassen. Bedeutung der Zeichen $C_0$ und $Cw_0$.
54. Erklärung eines combinatorischen Aggregates. Allgemeines Glied und veränderliche Größen. Besondere Art der hier zu betrachtenden combinatorischen Aggregate und ihre Bezeichnung.
55. Einige Sätze über diese combinatorischen Aggregate.

56. Abgekürzte Bezeichnung der combinatoriſchen Aggregate mit einer veränderlichen Größe, ſtatt welcher die natürlichen Zahlen zu ſetzen ſind.
57. Reductionen, welche ſich auf dieſe Bezeichnung gründen.
58. Dieſelbe Bezeichnung kann oft auch auf combinatoriſche Aggregate mit mehreren veränderlichen Größen ausgedehnt werden. Transformationen ſolcher Aggregate durch Verwechslung der Summenzeichen.
59. Wie Inbegriffe von Combinationen mit Wiederholungen durch combinatoriſche Aggregate dargeſtellt werden.

## Drittes Kapitel.

### Arithmetik der Polynome.

60. Die Combinationslehre verhilft zu independenten Auflöſungen der Hauptprobleme der Arithmetik polynomiſcher Größen.
61. Beſchaffenheit der hier zu betrachtenden Polynome.

### Multiplication der Polynome.

62. Multiplication ſolcher Polynome, die nicht nach den Potenzen einer Hauptgröße geordnet ſind.
63. Multiplicationsformel für geordnete Polynome.
64. Formel für das Product zweier geordneter Polynome insbeſondere.
65. Entwickelung der Producte $(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\ldots$ und $(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)\ldots$
66. Summirung aller Combinationsklaſſen gegebener nicht wiederholbarer Elemente, und Anwendung derſelben auf die Beſtimmung der Anzahl aller Diviſoren einer ganzen Zahl, deren einfache Factoren bekannt ſind.
67. Entwickelung des Quotienten $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots}$

### Potenzirung der Polynome für ganze poſitive Exponenten.

68. Potenzirung eines Polynoms, deſſen Glieder nicht nach den Potenzen einer Hauptgröße fortſchreiten. (Polynomialformel).
69. Andere Geſtalten dieſer Polynomialformel.
70. Potenzirung der Polynome, welche nach den Potenzen einer Hauptgröße geordnet ſind.
71. Andere Geſtalt der Potenzirungsformel für geordnete Polynome.
72. Bemerkungen über den Umfang der darin vorkommenden combinatoriſchen Aggregate.

73. Die in 71 gegebene Form des polynomiſchen Lehrſatzes für geordnete Polynome läßt ſich auch auf die Potenzirungsformel für nicht geordnete Polynome übertragen.

Potenzirung der Polynome für jeden Exponenten.

74. Unterſuchung, für welche der früher gegebenen Potenzirungsformeln eine Ausdehnung auf andere, als ganze poſitive Exponenten möglich ſeyn dürfte.

75. 76. Eigenſchaften der Größe $\binom{n}{k}$ für jeden Werth von n.

77. Multiplication der Polynomialformeln für jeden Werth des Exponenten, als Vorbereitung zum Beweiſe der Allgemeinheit des polynomiſchen Lehrſatzes.

78. Der polynomiſche Satz gilt für commenſurable gebrochene und negative Exponenten.

79. Er gilt auch für incommenſurable Exponenten.

80. 81. Eigenſchaften der Polynomial-Coefficienten.

82. Recurrirende Form des polynomiſchen Lehrſatzes.

83. Allgemeinere Relationen zwiſchen den Polynomial-Coefficienten.

84. Die Umkehrung der Reihen.

85. Beiſpiele über den Gebrauch der Umkehrungsformel.

Beſondere Fälle des polynomiſchen Lehrſatzes.

a) Der binomiſche Lehrſatz.

86. Ableitung des binomiſchen Lehrſatzes aus dem polynomiſchen.

87. Verfahren, den binomiſchen Lehrſatz unmittelbar auf dem kürzeſten Wege darzuſtellen.

88. Regel für die Potenzirung eines Binoms. Beiſpiele.

89. Binomial-Coefficienten und ihre Formen für verſchiedene Werthe der Exponenten.

90. Methode eine Tabelle über die Binomial-Coefficienten zu entwerfen.

91. Summirung der erſten und der zweiten Potenzen der Binomial-Coefficienten.

92. 93. Summirung der mit wechſelnden Zeichen genommenen Binomial-Coefficienten.

94. Eine allgemeine Relation zwiſchen den Polynomial-Coefficienten.

95. Der binomiſche Lehrſatz kann zur näherungsweiſen Ausziehung der Wurzeln gebraucht werden.

96. Erklärung der Convergenz und der Divergenz einer Reihe.

97. Jede convergirende Reihe iſt eine fallende, aber nicht jede fallende Reihe iſt eine convergirende.

98. Convergenz einer geometrischen Progression.
99. Ein Mittel zur Beurtheilung der Convergenz einer Reihe.
100. Eine convergirende Reihe für $\sqrt[n]{N}$.

b) Division der Polynome.

101. Entwickelung des Quotienten, welcher aus der Division der Einheit durch ein nach einer Hauptgröße geordnetes Polynom entspringt.
102. Quotient zweier nach einerlei Hauptgröße mit einerlei Differenz ihrer Exponenten fortschreitender Polynome.
103. Besonderer Fall, in welchem dieser Quotient auf eine einfachere Form gebracht werden kann.
104. Recurrirendes Verfahren zur Bestimmung dieses Quotienten.
105. Bestimmung zweier Polynome, durch deren Division ein gegebenes nach einer Hauptgröße geordnetes Polynom erzeugt wird.

## Viertes Kapitel.

### Entwickelung der Exponentialgrößen.

106. Nähere Angabe des Gegenstandes dieses Kapitels.
107. Umstaltung der Exponentialgröße $B^z$ in eine nach den Potenzen von z fortschreitende Reihe.
108 Transformationen der in dieser Reihe vorkommenden Coefficienten der Hauptgröße.
109. Summirung einer gegebenen Combinationsklasse der natürlichen Zahlen ohne Wiederholungen.
110. Summirung einer gegebenen Combinationsklasse der natürlichen Zahlen mit Wiederholungen.
111. Berechnung des ersten Gliedes einer beliebigen Differenzreihe, wenn die Hauptreihe gegeben ist.
112. Andere Formel für die Summe einer Combinationsklasse der natürlichen Zahlen mit Wiederholungen.
113. Entwickelung der Exponential-Größe $B^z$ wenn z ein nach den Potenzen einer Hauptgröße x geordnetes Polynom vorstellt.
114. Besonderer Fall, in welchem die Coefficienten dieser Entwickelung aus einer einfachen Recursionsformel hervorgehen.
115. Betrachtung der Größe $e = \sum_{0}^{\nu} \frac{1}{\nu!}$;
116. Das natürliche und die künstlichen Logarithmensysteme.
117. Reihen zur Berechnung der natürlichen Logarithmen gegebener Zahlen.

118. Logarithmus eines nach einer Hauptgröße geordneten Polynoms.
119. Entwickelung der Exponential-Größen ohne Hülfe des polynomischen Lehrsatzes. Ableitung der Grundreihe für die natürlichen Logarithmen aus der Reihe für die Exponential-Größen. Uebergang auf den binomischen und polynomischen Lehrsatz.
120. Umkehrung der Reihe $y^m = \sum_0^r \frac{x^{h+rt}}{r!}$

## Fünftes Kapitel.

### Ableitung einiger Reihen für goniometrische Größen.

121. Ausdruck für die imaginäre Größe $e^{x\sqrt{-1}}$, wobei e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und x eine reelle Größe anzeigt.
122. Relationen zwischen den Bestandtheilen dieses Ausdruckes.
123. 124. Goniometrische Bedeutung dieser Bestandtheile. Entwickelung des Sinus und des Cosinus nach den Potenzen des Bogens.
125. Entwickelung der Tangente und Cotangente nach den Potenzen des zugehörigen Bogens.
126. Ausdrücke eines Bogens durch seine Tangente.
127. Entwickelung eines Bogens nach den Potenzen seines Sinus.
128. Die goniometrische Binomialformel. Vorsicht bei dem Gebrauche derselben.
129. Ausdrücke für den Sinus und für den Cosinus eines vielfachen Bogens durch den Sinus und Cosinus des einfachen.
130 — 134. Reihen für den Sinus und Cosinus eines vielfachen Bogens, geordnet nach den Potenzen des Cosinus des einfachen Bogens.
135. Die Substitution von Reihen in Reihen kann auf unvollständige Resultate führen.
136. 137. Ausdrücke für sin n x und für cos n x durch sin x.
138. Umstaltung der nach steigenden Potenzen geordneten Entwickelungen von sin n x und cos n x in solche, die nach fallenden Potenzen fortschreiten, und umgekehrt.
139. Ausdruck für die Potenzen des Cosinus eines Bogens durch Cosinusse der Vielfachen dieses Bogens.
140. Ausdrücke für die Potenzen des Sinus eines Bogens durch Sinusse oder Cosinusse der Vielfachen dieses Bogens.

## Sechstes Kapitel.

### Von den Facultäten.

141. Erklärung einer Facultät. Bezeichnung derselben.

142. Reduction einer Facultät auf eine andere mit beliebiger Grundzahl oder mit beliebiger Differenz.
143. Zweifache Anſicht einer und derſelben Facultät. Zerfällung einer Facultät in ein Product anderer Facultäten.
144. Bedeutung der Facultäten mit negativen und mit gebrochenen Exponenten.
145. Reduction der Facultäten mit ganzen poſitiven Exponenten auf Binomial-Coefficienten.

Der binomiſche und polynomiſche Lehrſatz für Facultäten.

146. Binomialformel für Facultäten mit ganzen poſitiven Exponenten.
147. Binomialformel für Facultäten mit ganzen negativen Exponenten.
148. Polynomialformel für Facultäten.

Entwickelung der Facultäten nach Potenzen der Grundzahl und der Differenz.

149. Entwickelung der Facultäten mit ganzen poſitiven Exponenten.
150. Ueber die Berechnung der dieſer Entwickelung zum Grunde liegenden, vom Exponenten der Facultät abhängenden Coefficienten.
151. Entwickelung der Facultäten mit ganzen negativen Exponenten.
152. Berechnung der dabei vorkommenden Coefficienten.
153. 154. Zuſammenſtellung beider Entwickelungen unter eine gemeinſchaftliche Form, und Ableitung der zwiſchen den Coefficienten derſelben beſtehenden Recurſionen.

Entwickelung der Potenzen nach Facultäten mit einer beliebigen Differenz.

155. Die Behandlung dieſer Entwickelung iſt der Umkehrung der Reihen analog.
156. Reduction der hier vorkommenden Coefficienten auf die bei den früheren Entwickelungen erhaltenen.
157. Summirung gleichnamiger Potenzen der Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion durch Facultäten. Anwendung auf die Summirung gleichnamiger Potenzen der natürlichen Zahlen mit ganzen poſitiven Exponenten.

Siebentes Kapitel.

Eigenſchaften der algebraiſchen Ausdrücke in Bezug auf die gegenſeitige Vertauſchung darin vorkommender unbeſtimmter Größen.

158. Eintheilung der algebraiſchen Ausdrücke in ſymmetriſche und in unſymmetriſche.

159. Die symmetrischen Ausdrücke sind entweder einfache oder zusammengesetzte.

160. Bildung eines einfachen symmetrischen Ausdruckes, dessen Glieder Producte beliebiger Potenzen der Grundgrößen sind.

161. Anzahl der Glieder eines solchen symmetrischen Ausdruckes.

162. Die Anzahl der verschiedenen Formen, welche ein unsymmetrischer auf n Größen sich beziehender Ausdruck bei allen Permutationen dieser Größen anzunehmen vermag, ist nicht größer, als die Permutationszahl n!

163. Sie ist stets ein Theiler von n!

164. Sie kann nie kleiner seyn, als die größte n nicht übersteigende Primzahl ohne = 2 zu werden.

165. Oder allgemeiner: Sie kann nie kleiner seyn, als das Product ungleicher, von der Einheit verschiedener Primzahlen, deren Summe n nicht übersteigt, ohne = 2 zu werden.

## Achtes Kapitel.

### Zusammenhang einer besondern Klasse symmetrischer Polynome mit den Combinationen ihrer Grundgrößen.

166. Bezeichnung der hier zu betrachtenden symmetrischen Ausdrücke.

167. Recurrirende Reduction der Summe gleichnamiger Potenzen mehrerer Größen für einen ganzen positiven Exponenten auf die Combinationen dieser Größen.

168. Auflösung derselben Aufgabe für einen ganzen negativen Exponenten.

169. Independente Behandlung beider Fälle.

170. Recurrirende und independente Reduction einer Combinationsklasse beliebiger Größen ohne Wiederholungen auf Potenzensummen derselben.

171. Recurrirende Reduction eines einfachen symmetrischen Ausdruckes, dessen Glieder Producte verschiedener Potenzen der Grundgrößen mit ganzen Exponenten sind, auf Potenzensummen dieser Größen.

172. 173. Auflösung dieser Aufgabe, wenn der symmetrische Ausdruck mehrere Potenzen der Grundgrößen mit gleichen Exponenten enthält.

174. 175. Independente Auflösung der vorigen Aufgaben.

176. Reduction einer bestimmten Combinationsklasse der Quadrate gegebener Größen ohne Wiederholungen auf die Combinationsklassen der einfachen Größen.

# Erſtes Kapitel.

## Vorbegriffe aus der Combinationslehre.

1.

Alles, was im Nebeneinanderſeyn oder im Aufeinanderfolgen als zuſammengehörig betrachtet wird, bildet eine Gruppe oder Complexion. Jeder einzelne Beſtandtheil einer Gruppe wird ein Element derſelben genannt. Aus gegebenen Elementen Gruppen zuſammenſetzen, heißt combiniren im weiteſten Sinne des Wortes.

So bilden z. B. die fünf Nummern, welche im gewöhnlichen Lottoſpiele bei jeder Ziehung aus 90 Nummern herausgehoben werden, eine Gruppe; jede dieſer Nummern iſt ein Element der Gruppe; man combinirt, wenn man die verſchiedenen Arten darſtellt, auf welche jedesmal fünf andere Nummern gezogen werden können.

2.

Die Combinationslehre beſchäftiget ſich mit der Darſtellung aller Complexionen, welche aus gegebenen Elementen, unter vorgeſchriebenen Bedingungen, gebildet werden können.

3.

Die zu combinirenden Elemente können was immer für gleichartige oder ungleichartige Gegenſtände ſeyn, als: Perſonen, Farben, Buchſtaben, Sylben, Wörter, Zahlen u. d. gl.

Die Combinationslehre, für sich betrachtet, abstrahirt von jeder unter denselben allenfalls möglichen arithmetischen Verbindung, sondern sieht bloß auf die Art ihres Nebeneinanderseyns oder Aufeinanderfolgens. Bey den Anwendungen der Combinationslehre auf Probleme des Calculs hingegen, sind die Elemente stets arithmetisch zu verbindende Zahlen, so wie denn auch die Complexionen untereinander arithmetische Verknüpfungen eingehen.

Es ist daher die Combinationslehre eine selbstständige Grundwissenschaft, die jedoch mit der Arithmetik in enger Verbindung steht, weil alle arithmetischen Operationen zuletzt auf Combinationen der Zahlen als Repräsentanten der Grössen beruhen, und man die Gesetze dieser Operationen nur aus den allgemeinen Gesetzen des geregelten Gruppirens gegebener Elemente schöpfen kann.

4.

Um die Operationen der Combinationslehre schriftlich darstellen zu können, ist es nöthig für die gegebenen Elemente besondere Zeichen zu wählen; das Zusammenstellen der Elemente zu einer Complexion wird dann füglich durch ein Nebeneinanderschreiben der ihnen entsprechenden Zeichen angedeutet. Am vortheilhaftesten ist es, die Elemente durch Zahlen vorzustellen. Zu diesem Zwecke denkt man sich sämmtliche Elemente in einer beliebigen Ordnung aneinander gereiht und bezeichnet sie, so wie sie da aufeinander folgen, mit den Symbolen der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . u. s. w.; diese Zahlen heißen die Zeiger (indices) der Elemente. Ein Ausdruck wie 275 bedeutet hier die aus dem zweiten, dem siebenten und aus dem fünften der gegebenen Elemente gebildete Complexion, wodurch zugleich die Ordnung angezeigt wird, in welcher diese Elemente aneinander zu fügen sind. Um einen die Zahl 9 überschreitenden Zeiger, wie 25, von der Complexion der Zeiger 2 und 5 zu unterscheiden, kann man ihn durch einen darübergesetzten

Querſtrich kenntlich machen, alſo die Complexion der Elemente 2, 5 und 25, durch $25\overline{25}$ vorſtellen.

Die Bezeichnung der Elemente durch Zahlen erleichtert die wirkliche Ausführung combinatoriſcher Operationen ſo ſehr, daß man ſelbſt in dem Falle, wenn die zu combinirenden Elemente Buchſtaben, alſo bereits Schriftzeichen ſind, ſich der Zeiger bedient; nur wählt man dann, um mit größter Leichtigkeit Buchſtaben und Zeiger gegen einander austauſchen zu können, bei der Feſtſetzung der Zeiger, wenn nicht andere Rückſichten eintreten, die allgemein übliche alphabetiſche Ordnung der Buchſtaben, ſo daß z. B. den Buchſtaben

a, b, c, d, e . . . .

oder $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ . . . .

die Zeiger 1, 2, 3, 4, 5 . . . . entſprechen.

Hat man es mit Buchſtaben zu thun, die bloß durch unten rechts angehängte Zahlen von einander unterſchieden werden, wie $a_1, a_2, a_3, a_4$ .... welche, um den Bau eines arithmetiſchen Ausdruckes beſſer zu überſehen, zur Bezeichnung analoger, in der Rechnung vorkommender, Größen gebraucht werden, und den, zu gleichem Zwecke üblichen, accentuirten Buchſtaben $a', a'', a''', a''''$ . . . . in mehrfacher Hinſicht vorzuziehen ſeyn dürften; ſo läßt man dieſe Zahlen für die Zeiger der Buchſtaben gelten. Dieß veranlaßt in manchen Fällen auch die Null als Zeiger zu brauchen.

5.

Oefters ſieht man einige Elemente rückſichtlich ihres Beitragens zur Bildung einer Complexion als völlig gleichbedeutend an, ſo daß eine Vertauſchung derſelben untereinander keine Aenderung in der Complexion erzeugt, wie es z. B. wenn man aus den Buchſtaben eines Wortes andere Wörter zu bilden verſucht, bei ſolchen Buchſtaben der Fall iſt, die in dem Worte wiederholt vorkommen. Dieſe in combinatoriſcher Be-

ziehung gleichen Elemente müſſen natürlich auch einerlei Zeiger erhalten.

Es hat alſo die combinatoriſche Gleichheit der Elemente mit der arithmetiſchen Gleichheit der Zahlen nichts gemein. Nicht ſelten iſt man in der Lage, arithmetiſch gleiche Elemente als combinatoriſch verſchieden zu betrachten und mit verſchiedenen Zeigern zu belegen.

6.

Die Zeiger beſtimmen die Rangordnung der Elemente. Von zwei Elementen, welche verſchiedene Zeiger haben, heißt jenes, dem der größere Zeiger zukommt, das höhere, das andere aber das niedrigere Element.

7.

Um combinatoriſche Operationen auf einfache und ſichere Vorſchriften gründen zu können, iſt man genöthigt, unter den Complexionen ebenfalls eine Rangordnung einzuführen. Werden nämlich zwei Complexionen, von der Linken gegen die Rechte, ſtellenweiſe mit einander verglichen, ſo heißt jene die höhere, in welcher die erſte der verſchieden beſetzten Stellen ein höheres Element enthält.

So iſt z. B. die Complexion 235164 höher als 231654, und dieſe iſt wieder höher als 231465; alle drei ſind aber niedriger als 321.

Man ſagt, Complexionen ſind gut geordnet, wenn ſie ſo aufeinander folgen, daß nie eine höhere einer niedrigern vorangeht.

## Allgemeine Methode eine combinatoriſche Operation auszuführen.

8.

Man denke ſich was immer für eine combinatoriſche Operation wirklich ausgeführt, und die ſich dabei ergebenden Complexionen gut geordnet, (7) ſo wird ſich immer, den Bedin-

gungen der Operation gemäß, ausfindig machen lassen, welche die niedrigste Complexion ist, und wie aus jeder einzelnen Complexion die auf sie unmittelbar folgende nächsthöhere entsteht. Hat man ein allgemeines Verfahren, aus jeder einzelnen Complexion die nächsthöhere abzuleiten, entdeckt, so braucht man es nur, von der niedrigsten ausgehend, stufenweise auf jede der neuerzeugten Complexionen anzuwenden, um alle zur geforderten combinatorischen Operation gehörigen Fälle vollständig aufzuführen. Die Complexion, auf welche sich jenes Verfahren nicht weiter anwenden läßt, ist dann die höchste, und mit ihr ist die Operation geschlossen.

Es wird aber offenbar eine Complexion in eine höhere verwandelt, wenn man eine solche Aenderung in der Stellung ihrer Elemente vornimmt, daß die erste der neubesetzten Stellen (vorausgesetzt, daß man die Stellen einer Complexion, wie es hier und im Folgenden durchaus geschehen soll, von der Linken gegen die Rechte zählt) ein höheres Element erhält, als vorher in ihr stand, welches höhere Element früher in der Complexion entweder gar nicht vorkam, oder doch wenigstens eine der nachfolgenden Stellen einnahm; ferner wird die neugebildete Complexion der vorigen desto näher liegen, je weiter die erste der neubesetzten Stellen vom Anfange der Complexion absteht; je weniger sich das in sie gesetzte höhere Element über das vorher darin befindliche erhebt, und je niedriger die Complexion ist, welche die in die folgenden Stellen eingetheilten Elemente für sich allein darstellen.

Es ist also die niedrigste Complexion jene, in welcher jede Stelle so niedrig besetzt ist, als es die Natur der vorzunehmenden combinatorischen Operation verstattet, denn jede andere Anordnung der Elemente hat eine Erhöhung der Complexion zur Folge; und man findet zu einer Complexion die nächsthöhere, wenn man die vom Anfange der Complexion entfernteste Stelle aufsucht, in welche, ohne die Bedingungen der Operation

u verletzen, ein höheres Element geſetzt werden kann, als bereits in ihr ſteht; das nächſthöhere dieſen Bedingungen gemäß zuläſſige Element in gedachte Stelle bringt, und ohne mit den vorhergehenden Stellen eine Aenderung vorzunehmen, jede der nachfolgenden Stellen ſo niedrig als möglich beſetzt.

## Combinatoriſche Grundoperationen.

### §.

Es ſind mannigfaltige Arten des geregelten Gruppirens gegebener Elemente denkbar, welche eben ſo viele combinatoriſche Operationen veranlaſſen können. Allein, was man auch immer für eine ſolche Operation vornehmen mag, ſo kommt doch bei der Bildung jeder einzelnen Complexion nichts weiter in Betrachtung, als welche aus den gegebenen Elementen und in welcher Ordnung ſie dazu verwendet werden ſollen. Man kann nun entweder bloß die Ordnung, oder bloß die Verſchiedenheit der Elemente zum Unterſcheidungsmerkmale der Complexionen machen, und ſomit ergeben ſich zwei combinatoriſche Operationen, das Permutiren, und das Combiniren in engerer Bedeutung des Wortes, welche unſtreitig die einfachſten ſind, die ſich unter der Vorausſetzung, daß jedes der gegebenen Elemente mit jedem der andern verbunden werden darf, erdenken laſſen.

Sind aber abgeſonderte Reihen von Elementen mit der Beſchränkung gegeben, daß nur ſolche Elemente, die zu verſchiedenen Reihen gehören, in eine Complexion zuſammentreten dürfen, ſo beſteht die einfachſte Operation, das Variiren darin, daß man zur Bildung jeder Complexion ſämmtliche Reihen, auf eine durchaus gleichförmige Weiſe, mitwirken läßt.

Die hier genannten drei einfachſten Operationen ſind alſo als die combinatoriſchen Grundoperationen anzuſehen. Wir werden uns auf ſie allein beſchränken, da man mit

denſelben, bei allen Anwendungen der Combinationslehre auf Probleme des Calculs, ausreicht.

## Das Permutiren.

10.

Gegebene Elemente **permutiren** oder **verſetzen**, heißt dieſelben, ſo oft es möglich iſt, in einer andern Ordnung aufeinander folgen laſſen. Jede einzelne Complexion, die hier eine beſtimmte Art des Aneinanderreihens aller Elemente vorſtellt, wird eine **Permutationsform**, oder auch eine **Permutation** (Verſetzung) genannt.

11.

Wendet man die allgemeinen Vorſchriften, die zur Ausführung jeder combinatoriſchen Operation in 8 gegeben worden ſind, auf das Permutiren an, ſo ſieht man, daß die niedrigſte Permutationsform jene iſt, in der alle Elemente in ihrer natürlichen Ordnung, d. h. ſo ſtehen, daß ihre Zeiger von der Linken gegen die Rechte wachſen; daß ferner zu einer Permutationsform die nächſthöhere gefunden wird, wenn man die entfernteſte Stelle aufſucht, in welche aus den nachfolgenden Stellen ein höheres Element geſetzt werden kann, als bereits in ihr ſteht; das nächſthöhere Element in dieſe Stelle bringt, und die in die folgenden Stellen gehörenden Elemente in ihrer natürlichen Ordnung aneinanderreiht.

So iſt z. B. in der Complexion 4327651 die dritte, das Element 2 enthaltende Stelle, die letzte, in welche ein, aus den nachfolgenden Stellen genommenes, höheres Element geſetzt werden kann; das nächſthöhere der dort vorfindigen Elemente iſt 5, und ſomit ergibt ſich 4351267 als die auf 4327651 folgende, nächſthöhere Permutationsform.

Dieſes Verfahren leidet offenbar auf jene Complexion keine Anwendung, in welcher die Elemente in verkehrter Ordnung, oder ſo erſcheinen, daß ihre Zeiger von der Linken gegen die

Rechte abnehmen. Dieſe Complexion iſt demnach die höchſte Permutationsform der gegebenen Elemente.

Durch gehörige Anwendung des hier Geſagten, iſt man im Stande, alle Permutationen gegebener Elemente ſtufenweiſe zu finden, es mögen dieſe Elemente durchaus von einander verſchieden ſeyn, oder darunter gleiche vorkommen, in welchem letztern Falle man es mit den ſogenannten Permutationen mit Wiederholungen zu thun hat, die aber, wie man ſieht, kein beſonderes Verfahren erfordern.

Zur Erläuterung mögen folgende zwei Beiſpiele vollſtändiger Darſtellungen aller Permutationen dienen, wovon das erſte auf vier verſchiedene, das zweite aber auf zwei verſchiedene und drei gleiche Elemente ſich bezieht.

I.

Gegebene Elemente: 1, 2, 3, 4.

Permutationen:

1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 2 4
1 3 4 2
1 4 2 3
1 4 3 2
2 1 3 4
2 1 4 3
2 3 1 4
2 3 4 1
2 4 1 3
2 4 3 1
3 1 2 4
3 1 4 2
3 2 1 4
3 2 4 1
3 4 1 2
3 4 2 1
4 1 2 3
4 1 3 2
4 2 1 3
4 2 3 1
4 3 1 2
4 3 2 1

II.

Gegebene Elemente: 1, 2, 2, 2, 3.

Permutationen:

1 2 2 2 3
1 2 2 3 2
1 2 3 2 2
1 3 2 2 2
2 1 2 2 3
2 1 2 3 2
2 1 3 2 2
2 2 1 2 3
2 2 1 3 2
2 2 2 1 3
2 2 2 3 1
2 2 3 1 2
2 2 3 2 1
2 3 1 2 2
2 3 2 1 2
2 3 2 2 1
3 1 2 2 2
3 2 1 2 2
3 2 2 1 2
3 2 2 2 1

§ 2.

Wenn nach der Anzahl der Versetzungen gefragt wird, welche eine gegebene Menge von Elementen zuläßt, so muß man unterscheiden, ob die Elemente sämmtlich von einander verschieden sind, oder ob darunter gleiche vorkommen.

Erster Fall. Die Elemente, deren Anzahl = n ist, sind sämmtlich von einander verschieden.

Man stelle sich die Versetzungen der n Elemente gut geordnet vor, so erscheinen dabei zuerst alle Complexionen, die mit dem ersten Elemente anfangen, dann kommen jene, die das zweite, dritte . . . nte Element an der Spitze führen. Es gibt hier also n Parthien von Versetzungen, die mit einem gemeinschaftlichen Anfangselemente versehen sind. In jeder dieser Parthien kommen gleichviel Complexionen vor, und zwar, wenn man das Anfangselement absondert, sämmtliche Versetzungen der übrigen n — 1 Elemente, gut geordnet. Denn da hier alle Elemente zur Bildung der Permutationsformen auf eine durchaus gleichförmige Weise beitragen, so kommt in eine bestimmte Stelle jedes einzelne so oft zu stehen, als die übrigen, und dabei finden alle nur möglichen Abänderungen in der Anordnung dieser übrigen Statt. Bezeichnet man daher allgemein die Anzahl der Permutationen für n verschiedene Elemente durch das Symbol $P_n$, so hat man

$$P_n = n P_{n-1}.$$

Nun läßt sich ein einziges Element nur einmal ansetzen, daher ist $P_1 = 1$, also

$$P_2 = 2. P_1 = 1. 2$$
$$P_3 = 3. P_2 = 1. 2. 3$$
$$P_4 = 4. P_3 = 1. 2. 3. 4$$
u. s. w.

und allgemein

$$P_n = 1. 2. 3. 4 \ldots (n-1) n.$$

Das Product der natürlichen Zahlen, von 1 angefangen

bis n, wird sehr bequem durch das von Kramp in seinen Élémens d'Arithmétique universelle, Cologne 1808, angenommene Zeichen n! angedeutet, dessen wir uns im Folgenden, der Kürze wegen, immer bedienen wollen.

Es ist also die Anzahl der Versetzungen für n verschiedene Elemente = n!

Zweiter Fall. a.) Unter den gegebenen n Elementen befinden sich $\alpha$ einander gleiche.

Man behandle diese Elemente anfänglich so, als wären sie sämmtlich von einander verschieden, so geben sie, wie oben gezeigt wurde n! Versetzungen. Diese Versetzungen denke man sich in Parthien so abgetheilt, daß die Complexionen jeder einzelnen Parthie sich bloß durch die gegenseitige Stellung der, einstweilen als verschieden betrachteten, $\alpha$ Elemente von einander unterscheiden, während die andern Elemente genau dieselben Plätze, in derselben Ordnung, einnehmen. Jede Parthie enthält hier so viel Complexionen, als jene $\alpha$ Elemente Versetzungen zulassen, nämlich $\alpha$! Complexionen und die Anzahl der Parthien ist demnach $= \frac{n!}{\alpha!}$. Läßt man die $\alpha$ Elemente wieder einander gleich seyn, so gelten alle Complexionen einer Parthie bloß für eine Versetzung, und man hat nur mehr so viele verschiedene Versetzungen, als Parthien vorhanden sind; daher ist die Anzahl der Versetzungen von n Elementen, worunter $\alpha$ gleiche bekommen,

$$= \frac{n!}{\alpha!}$$

b.) Unter den gegebenen n Elementen befinden sich außer den $\alpha$ gleichen, noch $\beta$ andere gleiche Elemente.

Man nehme anfänglich an, diese n Elemente enthalten bloß $\alpha$ gleiche, so ist die Anzahl aller Versetzungen $= \frac{n!}{\alpha!}$. Sie lassen sich in Parthien abtheilen, deren jede nur solche

Complexionen enthält, in welchen die einstweilen als verschieden betrachteten $\beta$ Elemente eine andere gegenseitige Stellung haben, hingegen die übrigen Elemente genau auf einerlei Art gruppirt sind. In jeder Parthie befinden sich $\beta!$ Complexionen, und man hat daher in allem $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!}$ Parthien. Hebt man den, zwischen den $\beta$ Elemente bestehenden, Unterschied wieder auf, so hat man nur mehr so viele verschiedene Versetzungen, als Parthien da sind, und daher ist die Anzahl der Versetzungen von n Elementen, unter denen $\alpha$ gleiche und noch $\beta$ andere gleiche erscheinen $= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}$.

c.) Durch dieselben Schlüsse findet man die Anzahl der Versetzungen für n Elemente unter denen $\alpha$ gleiche, $\beta$ andere gleiche, $\gamma$ wieder andere gleiche u. s. w. vorkommen

$$= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\text{&c.}}$$

Beispiele. Acht Kugeln lassen sich überhaupt

$8! = 1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8 = 40320$ mal

in eine andere Ordnung stellen; acht Kugeln, worunter eine roth, zwei gelb, fünf blau sind, geben aber nur

$$\frac{8!}{1!\,2!\,5!} = \frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.}{1.\,1.\,2.\,1.\,2.\,3.\,4.\,5.} = 168$$ Complexionen

mit veränderter Farbenvertheilung.

Die zehn Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 können $10! = 3628800$ mal eine andere Ordnung annehmen; fragt man aber nach der Anzahl der ganzen Zahlen, welche mit diesen zehn Zeichen geschrieben werden können, so müssen die Complexionen derselben, welche o an der Spitze führen, deren Anzahl $= 9! = 362880$ ist, bei der Aufzählung der möglichen verschiedenen Stellungen dieser Zeichen übergangen werden. Es können also durch gleichzeitigen Gebrauch der gedachten zehn

Zahlzeichen bloß $10! - 9! = 3265920$ verſchiedene ganze Zahlen gebildet werden.

Für das Beiſpiel I. in 11 iſt die Anzahl der Complexionen $= 4! = 1.2.3.4. = 24$, und für das Beyſpiel II. iſt ſie $= \frac{5!}{3!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.} = 20.$

13.

Will man den Ausdruck $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\text{ꝛc.}}$ als die allgemeine Formel der Verſetzungszahl für n Elemente betrachten, ſo muß man, ſobald einer der Buchſtaben $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gleich Null zu ſetzen iſt, das betreffende Product $\alpha!$ oder $\beta!$ oder $\gamma!$ u. ſ. w. aus dem Nenner weglaſſen, oder was daſſelbe iſt, $0! = 1$ annehmen. Dieſe Annahme ſteht übrigens mit der Bedeutung des Zeichens n! im Einklange. Es iſt nämlich

$$n! = (n - 1)!\,n$$

folglich $(n - 1)! = \frac{n!}{n}$, welche Gleichung, wenn man darin $n = 1$ ſetzt,

$$0! = \frac{1!}{1} = 1 \text{ gibt.}$$

14.

Da die Anzahl der Permutationen von n Elementen, worunter $\alpha$ gleiche, $\beta$ andere gleiche u. ſ. w. vorkommen, nothwendig eine ganze Zahl iſt, ſo muß das Product der natürlichen Zahlen von 1 bis n, durch die mit einander multiplicirten Producte der natürlichen Zahlen von 1 bis $\alpha$, von 1 bis $\beta$ u. ſ. w. ohne Reſt theilbar ſeyn, wenn nur die Zahl n von der Summe $\alpha + \beta + \text{ꝛc.}$ nicht übertroffen wird, ein Satz, der ſich auch direct beweiſen läßt.

## Von den Perioden der durch ein gemeinschaftliches Ableitungsgesetz verknüpften Permutationen ungleicher Elemente.

### 15.

Es sey $A_1$ eine aus n in combinatorischer Hinsicht (5) ungleichen Elementen bestehende Complexion. Man permutire diese Elemente untereinander nach Belieben, und erhalte hierdurch eine neue Complexion $A_2$, so sind dabei Elemente, welche vorher, d. i. in $A_1$ bestimmte Stellen einnahmen, in andere Stellen gekommen. Man lasse nun die Elemente der Complexion $A_2$ auf dieselbe Art ihre Stellen wechseln, wie dieß mit den Elementen der Complexion $A_1$ geschah, um daraus $A_3$ zu erzeugen, so daß wenn beim Uebergange von $A_1$ auf $A_2$, ein in der rten Stelle befindliches Element in die ste Stelle gesetzt wurde, auch gegenwärtig das in der rten Stelle von $A_2$ stehende Element in die ste Stelle komme. Es entsteht dadurch eine neue Complexion $A_3$, aus welcher man nach demselben Gesetze wieder eine andere $A_4$ ableiten kann, u. s. w.

Da die Anzahl der verschiedenen Permutationsformen n ungleicher Elemente $= 1.2.3.4, \ldots (n-1)\, n = n!$ also begrenzt ist, so muß man durch Fortsetzung des obigen Verfahrens endlich eine Complexion erhalten, deren Elemente dieselben Stellen inne haben, an welchen sie sich in einer früher entstandenen Complexion befinden, so daß diese frühere Complexion hier wieder erzeugt worden ist.

Es seyen $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ .... $A_r$ auf dirsem Wege entstandene durchaus verschiedene Complexionen und $A_{r+1}$ die erste wiederholte Complexion, so muß $A_{r+1}$ der anfänglichen A gleich seyn. Denn wäre $A_{r+1}$ nicht der $A_1$, sondern einer zwischen $A_1$ und $A_{r+1}$ liegenden Complexion $A_q$ gleich, so müßte, weil $A_q$ aus $A_{q-1}$ nach demselben Permutationsgesetze entsteht, wie $A_{r+1}$ aus $A_r$, folglich auch durch ein umgekehr-

tes Verfahren $A_r$ aus $A_{r+1}$ nach demſelben Geſetze erhalten wird, wie $A_{q-1}$ aus $A_q$, nothwendig $A_r = A_{q-1}$ ſeyn, und aus demſelben Grunde $A_{r-1} = A_{q-2}$, $A_{r-2} = A_{q-3}$ u. ſ. w. bis ſich endlich $A_{r-(q-2)} = A_{q-(q-1)}$ d. h. $A_{r-(q-2)} = A_1$ ergibt. Es wäre alſo, gegen die Vorausſetzung, nicht $A_{r+1}$, ſondern $A_{r-(q-2)}$ die erſte wiederholte Complexion, und dieſe iſt der obigen Behauptung gemäß $= A_1$.

16.

Eine Reihe von Complexionen beſtimmter unter einander verſchiedener Elemente, deren jede folgende aus der vorangehenden nach demſelben Permutationsgeſetze entſteht, ſo weit fortgeſetzt, als es ohne Wiederholung der erſten Complexion möglich iſt, ſoll eine Periode heißen.

Das Permutationsgeſetz, welches der Bildung einer Periode zum Grunde liegt, wird immer durch die Vergleichung zweier unmittelbar auf einander folgender Complexionen erſichtlich. Man kann es ſymboliſch bequem darſtellen, wenn man die ſucceſſiven Stellen jeder Complexion durch die nebeneinander geſchriebenen Zahlen 1, 2, 3, 4 .... andeutet, unter jede dieſer Zahlen den Zeiger jener Stelle ſetzt, aus der das Element genommen werden muß, welches in die durch die obere Zahl bezeichnete Stelle tritt, und beide Zeilen mit Klammern umſchließt. Stehen die Elemente der Anfangscomplexion einer Periode in der natürlichen Ordnung, d. h. nach der Folge ihrer Zeiger, ſo liegen in dem auf dieſe Art gebildeten Symbol zugleich die zwei erſten Complexionen der Periode vor Augen.

Die Perioden, welche aus 1234567 nach den Permutationsgeſetzen $\binom{1234567}{7463215}$ und $\binom{1234567}{2475136}$ hervorgehen, ſind demnach folgende:

| | |
|---|---|
| 1 2 3 4 5 6 7 | 1 2 3 4 5 6 7 |
| 7 4 6 3 2 1 5 | 2 4 7 5 1 3 6 |
| 5 3 1 6 4 7 2 | 4 5 6 1 2 7 3 |
| 2 6 7 1 3 5 4 | 5 1 3 2 4 6 7 |
| 4 1 5 7 6 2 3 | 1 2 7 4 5 3 6 |
| 3 7 2 5 1 4 6 | 2 4 6 5 1 7 3 |
| 6 5 4 2 7 3 1 | 4 5 3 1 2 6 7 |
| | 5 1 7 2 4 3 6 |
| | 1 2 6 4 5 7 3 |
| | 2 4 3 5 1 6 7 |
| | 4 5 7 1 2 3 6 |
| | 5 1 6 2 4 7 3 |

Aendern einem Permutationsgesetze zufolge nicht alle Elemente der Complexionen ihre Stellen, so kann man, bei der symbolischen Darstellung dieses Gesetzes, sich bloß mit der Anführung jener Stellen begnügen, deren Elemente einem Wechsel unterliegen. Demnach kann man das Permutationsgesetz $\binom{1234567}{7264513}$ kürzer durch $\binom{1367}{7613}$ bezeichnen.

Die daraus entspringende Periode ist:

1 2 3 4 5 6 7
7 2 6 4 5 1 3
3 2 1 4 5 7 6
6 2 7 4 5 3 1.

17.

Da aus der Endcomplexion einer Periode, dem in ihr herrschenden Permutationsgesetze gemäß, die Anfangscomplexion wieder hervorgeht, so kann man eine, demselben Bildungsgesetze unterworfene, Periode darstellen, wenn man von irgend einer Complexion anfangend, alle Complexionen ihrer Ordnung gemäß setzt, und dabei die Anfangscomplexion als eine auf die Endcomplexion unmittelbar folgende betrachtet. Es bilden daher die Complexionen einer Periode einen wahren Cyklus,

tes Verfahren $A_r$ aus $A_{r+1}$ nach demſelben Geſetze erhalten wird, wie $A_{q-1}$ aus $A_q$, nothwendig $A_r = A_{q-1}$ ſeyn, und aus demſelben Grunde $A_{r-1} = A_{q-2}$, $A_{r-2} = A_{q-3}$ u. ſ. w. bis ſich endlich $A_{r-(q-2)} = A_{q-(q-1)}$ d. h. $A_{r-(q-2)} = A_1$ ergibt. Es wäre alſo, gegen die Vorausſetzung, nicht $A_{r+1}$, ſondern $A_{r-(q-2)}$ die erſte wiederholte Complexion, und dieſe iſt der obigen Behauptung gemäß $= A_1$.

16.

Eine Reihe von Complexionen beſtimmter unter einander verſchiedener Elemente, deren jede folgende aus der vorangehenden nach demſelben Permutationsgeſetze entſteht, ſo weit fortgeſetzt, als es ohne Wiederholung der erſten Complexion möglich iſt, ſoll eine Periode heißen.

Das Permutationsgeſetz, welches der Bildung einer Periode zum Grunde liegt, wird immer durch die Vergleichung zweier unmittelbar auf einander folgender Complexionen erſichtlich. Man kann es ſymboliſch bequem darſtellen, wenn man die ſucceſſiven Stellen jeder Complexion durch die nebeneinander geſchriebenen Zahlen 1, 2, 3, 4 .... andeutet, unter jede dieſer Zahlen den Zeiger jener Stelle ſetzt, aus der das Element genommen werden muß, welches in die durch die obere Zahl bezeichnete Stelle tritt, und beide Zeilen mit Klammern umſchließt. Stehen die Elemente der Anfangscomplexion einer Periode in der natürlichen Ordnung, d. h. nach der Folge ihrer Zeiger, ſo liegen in dem auf dieſe Art gebildeten Symbol zugleich die zwei erſten Complexionen der Periode vor Augen.

Die Perioden, welche aus 1234567 nach den Permutationsgeſetzen $\binom{1234567}{7463215}$ und $\binom{1234567}{2475136}$ hervorgehen, ſind demnach folgende:

| | |
|---|---|
| 1 2 3 4 5 6 7 | 1 2 3 4 5 6 7 |
| 7 4 6 3 2 1 5 | 2 4 7 5 1 3 6 |
| 5 3 1 6 4 7 2 | 4 5 6 1 2 7 3 |
| 2 6 7 1 3 5 4 | 5 1 3 2 4 6 7 |
| 4 1 5 7 6 2 3 | 1 2 7 4 5 3 6 |
| 3 7 2 5 1 4 6 | 2 4 6 5 1 7 3 |
| 6 5 4 2 7 3 1 | 4 5 3 1 2 6 7 |
| | 5 1 7 2 4 3 6 |
| | 1 2 6 4 5 7 3 |
| | 2 4 3 5 1 6 7 |
| | 4 5 7 1 2 3 6 |
| | 5 1 6 2 4 7 3 |

Aendern einem Permutationsgeſetze zufolge nicht alle Elemente der Complexionen ihre Stellen, ſo kann man, bei der ſymboliſchen Darſtellung dieſes Geſetzes, ſich bloß mit der Anführung jener Stellen begnügen, deren Elemente einem Wechſel unterliegen. Demnach kann man das Permutationsgeſetz $\begin{pmatrix}1234567\\7264513\end{pmatrix}$ kürzer durch $\begin{pmatrix}1367\\7613\end{pmatrix}$ bezeichnen.

Die daraus entſpringende Periode iſt:

1 2 3 4 5 6 7
7 2 6 4 5 1 3
3 2 1 4 5 7 6
6 2 7 4 5 3 1.

17.

Da aus der Endcomplexion einer Periode, dem in ihr herrſchenden Permutationsgeſetze gemäß, die Anfangscomplexion wieder hervorgeht, ſo kann man eine, demſelben Bildungsgeſetze unterworfene, Periode darſtellen, wenn man von irgend einer Complexion anfangend, alle Complexionen ihrer Ordnung gemäß ſetzt, und dabei die Anfangscomplexion als eine auf die Endcomplexion unmittelbar folgende betrachtet. Es bilden daher die Complexionen einer Periode einen wahren Cyklus,

tes Verfahren $A_r$ aus $A_{r+1}$ nach demſelben Geſetze erhalten wird, wie $A_{q-1}$ aus $A_q$, nothwendig $A_r = A_{q-1}$ ſeyn, und aus demſelben Grunde $A_{r-1} = A_{q-2}$, $A_{r-2} = A_{q-3}$ u. ſ. w. bis ſich endlich $A_{r-(q-2)} = A_{q-(q-1)}$ d. h. $A_{r-(q-2)} = A_1$ ergibt. Es wäre alſo, gegen die Vorausſetzung, nicht $A_{r+1}$, ſondern $A_{r-(q-2)}$ die erſte wiederholte Complexion, und dieſe iſt der obigen Behauptung gemäß $= A_1$.

16.

Eine Reihe von Complexionen beſtimmter unter einander verſchiedener Elemente, deren jede folgende aus der vorangehenden nach demſelben Permutationsgeſetze entſteht, ſo weit fortgeſetzt, als es ohne Wiederholung der erſten Complexion möglich iſt, ſoll eine Periode heißen.

Das Permutationsgeſetz, welches der Bildung einer Periode zum Grunde liegt, wird immer durch die Vergleichung zweier unmittelbar auf einander folgender Complexionen erſichtlich. Man kann es ſymboliſch bequem darſtellen, wenn man die ſucceſſiven Stellen jeder Complexion durch die nebeneinander geſchriebenen Zahlen 1, 2, 3, 4 .... andeutet, unter jede dieſer Zahlen den Zeiger jener Stelle ſetzt, aus der das Element genommen werden muß, welches in die durch die obere Zahl bezeichnete Stelle tritt, und beide Zeilen mit Klammern umſchließt. Stehen die Elemente der Anfangscomplexion einer Periode in der natürlichen Ordnung, d. h. nach der Folge ihrer Zeiger, ſo liegen in dem auf dieſe Art gebildeten Symbol zugleich die zwei erſten Complexionen der Periode vor Augen.

Die Perioden, welche aus 1234567 nach den Permutationsgeſetzen $\binom{1234567}{7463215}$ und $\binom{1234567}{2475136}$ hervorgehen, ſind demnach folgende:

| | |
|---|---|
| 1 2 3 4 5 6 7 | 1 2 3 4 5 6 7 |
| 7 4 6 3 2 1 5 | 2 4 7 5 1 3 6 |
| 5 3 1 6 4 7 2 | 4 5 6 1 2 7 3 |
| 2 6 7 1 3 5 4 | 5 1 3 2 4 6 7 |
| 4 1 5 7 6 2 3 | 1 2 7 4 5 3 6 |
| 3 7 2 5 1 4 6 | 2 4 6 5 1 7 3 |
| 6 5 4 2 7 3 1 | 4 5 3 1 2 6 7 |
| | 5 1 7 2 4 3 6 |
| | 1 2 6 4 5 7 3 |
| | 2 4 3 5 1 6 7 |
| | 4 5 7 1 2 3 6 |
| | 5 1 6 2 4 7 3 |

Aendern einem Permutationsgesetze zufolge nicht alle Elemente der Complexionen ihre Stellen, so kann man, bei der symbolischen Darstellung dieses Gesetzes, sich bloß mit der Anführung jener Stellen begnügen, deren Elemente einem Wechsel unterliegen. Demnach kann man das Permutationsgesetz $\begin{pmatrix}1234567\\7264513\end{pmatrix}$ kürzer durch $\begin{pmatrix}1367\\7613\end{pmatrix}$ bezeichnen.

Die daraus entspringende Periode ist:

1 2 3 4 5 6 7
7 2 6 4 5 1 3
3 2 1 4 5 7 6
6 2 7 4 5 3 1.

17.

Da aus der Endcomplexion einer Periode, dem in ihr herrschenden Permutationsgesetze gemäß, die Anfangscomplexion wieder hervorgeht, so kann man eine, demselben Bildungsgesetze unterworfene, Periode darstellen, wenn man von irgend einer Complexion anfangend, alle Complexionen ihrer Ordnung gemäß setzt, und dabei die Anfangscomplexion als eine auf die Endcomplexion unmittelbar folgende betrachtet. Es bilden daher die Complexionen einer Periode einen wahren Cyklus,

welcher durch zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Complexionen völlig bestimmt wird.

18.

Die Anzahl r der eine Periode bildenden Complexionen $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_r$ für n gegebene ungleiche Elemente ist stets ein Theiler der Anzahl n! aller Versetzungen, welche diese n Elemente zulassen (12). Denn es sey $B_1$ eine von allen Complexionen jener Periode verschiedene Permutationsform der gegebenen Elemente, so kann man aus $B_1$ eine aus den r Complexionen $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_r$ bestehende Periode nach demselben Permutationsgesetze ableiten, welches der Periode $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_r$ zum Grunde liegt. Die Complexionen $B_1, B_2, B_3, B_4 \ldots B_r$ werden sowohl unter sich, als auch von den Complexionen $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_r$ verschieden seyn müssen. Denn es kommt bei der Bildung einer Periode nicht auf die Elemente, sondern bloß auf die Art ihrer Vertheilung in die Stellen der Complexionen an, und diese muß bei einerlei Permutationsgesetz immer dieselbe seyn. Es würde also eine Gleichheit unter einigen der Complexionen $B_1, B_2, B_3, B_4 \ldots B_r$ auch eine Gleichheit unter den correspondirenden der Complexionen $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_r$ nach sich ziehen, gegen die durch die Natur einer Periode selbst ausgesprochene Voraussetzung. Wäre ferner eine Complexion $B_g$ der zweiten Periode einer Complexion $A_h$ der ersten Periode gleich, so müßte auch $B_{g+1} = A_{h+1}$, $B_{g+2} = A_{h+2}$ u. s. w., folglich $B_{g+r-g+1}$ oder $B_{r+1}$ oder $B_1 = A_{h+r-g+1}$, oder $= A_{h-g+1}$ seyn, was der Voraussetzung, daß $B_1$ unter den Complexionen $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_r$ nicht vorkommt, widerspricht.

Auf dieselbe Weise wird, wenn $C_1$ eine von den Complexionen der beiden angeführten Perioden verschiedene Permutationsform der gegebenen Elemente ist, sich eine Periode $C_1, C_2, C_3, C_4 \ldots C_r$ bilden lassen, in welcher das bei den vorigen Perioden beobachtete Permutationsgesetz herrscht, deren

r Complexionen aber unter den früher genannten $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ . . . $A_r$ und $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ . . . $B_r$ nicht vorkommen. Da nun auf dieſelbe Weiſe jede, unter den bereits erhaltenen Complexionen nicht erſcheinende, Permutationsform der n Elemente eine neue Periode veranlaßt, bis alle n! Permutationsformen dieſer Elemente erſchöpft ſind, ſo zerfällt das ganze Syſtem der n! Permutationen in Parthien, deren jede aus r eine Periode darſtellenden Complexionen beſteht, und es muß, wenn p die Anzahl dieſer Perioden bezeichnet, offenbar $pr = n!$ ſeyn, wodurch denn die Behauptung, daß r ein Theiler von n! iſt, gerechtfertigt erſcheint.

19.

Um die Anzahl der Complexionen einer Periode, deren Permutationsgeſetz gegeben iſt, zu beſtimmen, muß man die Art, auf welche dabei eine Complexion aus der andern entſteht, näher berückſichtigen. Wenn man nämlich auf die Elemente ſieht, welche bei der Ableitung einer Complexion aus einer andern, in neue Stellen treten, ſo iſt es entweder nicht möglich, einige dieſer Elemente in die Stellen zu bringen, in welche ſie bei der Bildung der neuen Complexion wirklich gelangen, ohne auch die übrigen Elemente, welche zur Bildung jener neuen Complexion aus ihren Stellen gehoben werden mußten, in Bewegung zu ſetzen: oder es findet das Gegentheil Statt, ſo daß bei der Bildung der neuen Complexion gewiſſe Elemente unter ſich, und zugleich andere Elemente wieder unter ſich ihre Stellen wechſeln.

Wir wollen das Permutationsgeſetz, welches die Erzeugung der neuen Complexion bedingt, im erſten Falle ein *einfaches* und im zweiten Falle ein *zuſammengeſetztes* nennen; letzteres läßt ſich nämlich in mehrere, die Elemente gewiſſer Stellen betreffende, Permutationsgeſetze zerlegen, die nicht mehr weiter zerlegt werden können, alſo einfach ſind.

So ſind z. B. die in 16 angeführten Permutationsge-

ſetze $\binom{1234567}{7463215}$ und $\binom{1234567}{7264513} = \binom{1367}{7613}$ einfache; das Permutationsgeſetz $\binom{1234567}{2475136}$ iſt aber ein zuſammengeſetztes, denn es iſt eine Vereinigung der einfachen Permutationsgeſetze $\binom{1245}{2451}$ und $\binom{367}{736}$.

20.

Um eine Complexion aus einer andern nach einem einfachen, gegebene Stellen a, b, c, d, e . . . umfaſſenden Permutationsgeſetze abzuleiten, hebe man aus irgend einer dieſer Stellen, z. B. aus a, das darin befindliche Element heraus, und ſetze es in eine der Stellen b, c, d, e . . . z. B. in b; das dadurch verdrängte Element bringe man in eine der Stellen c, d, e . . . z. B. in c, nicht in a, weil ſonſt eine bloße Vertauſchung der in den Stellen a, b ſtehenden Elemente vor ſich gegangen wäre; hiedurch wird wieder ein Element verdrängt, welches man in eine der noch nicht neu beſetzten Stellen d, e... bringt, a ausgenommen, weil ſonſt bloß die in den Stellen a, b, c befindlichen Elemente unter ſich ihre Stellen gewechſelt hätten, gegen die Forderung eines ſich auf die Stellen a, b, c, d, e . . . erſtreckenden einfachen Permutationsgeſetzes; und ſo fahre man fort, jedem verdrängten Elemente eine der noch nicht neu beſetzten Stellen, a ausgenommen, anzuweiſen, bis außer a keine neu zu beſetzende Stelle mehr übrig iſt; dann erſt beſetzt man a mit dem letzten der verdrängten Elemente.

21.

Iſt m die Anzahl der Stellen, deren Elemente unter ſich nach einem einfachen Permutationsgeſetze vertauſcht werden ſollen, ſo bleiben für das Element, welches zuerſt aus einer dieſer Stellen herausgehoben wird, m — 1 Stellen übrig; wird was immer für eine dieſer m — 1 Stellen mit jenem

Elemente beſetzt, ſo kann das hiedurch verdrängte Element in m — 2 Stellen kommen, und bei jeder dieſer Beſetzungsweiſen ſtehen dem zunächſt verdrängten Elemente m — 3 Stellen offen, u. ſ. w. Man ſieht hieraus leicht, daß die Anzahl der Arten, auf welche aus einer Complexion eine andere nach einem, m beſtimmte Stellen umfaſſenden, einfachen Permutationsgeſetze abgeleitet werden kann, durch das Product
(m — 1) (m — 2) ... 3. 2. 1 = (m — 1)! ausgedrückt wird.

22.

Nach dem hier Geſagten iſt es leicht zu entdecken, ob ein gegebenes Permutationsgeſetz ein einfaches oder ein zuſammengeſetztes iſt. Man unterſucht, in was für eine Stelle das Element, welches eine beſtimmte Stelle der urſprünglichen Complexion einnimmt, dem Permutationsgeſetze gemäß kommt, wohin dann das verdrängte Element geſetzt wird u. ſ. w. Findet man, daß die Stelle, von welcher man ausging, eher neu beſetzt wird, als alle andern Stellen, deren Elemente einem Wechſel unterliegen, an die Reihe gekommen ſind; ſo iſt das Permutationsgeſetz ein zuſammengeſetztes, ſonſt aber ein einfaches.

23.

Eine Periode, welcher ein einfaches, ſich auf m Stellen beziehendes Permutationsgeſetz zum Grunde liegt, beſteht aus m Complexionen.

Denn ſind a, b, c, d, e . . . k die Zeiger der in was immer für einer Ordnung betrachteten m Stellen, deren Elemente in jeder Complexion verändert werden, und kommt dem Permutationsgeſetze gemäß, das in a befindliche Element an die Stelle b, das in b befindliche an die Stelle c, das in c befindliche an die Stelle d, u. ſ. w. endlich das in k befindliche an die Stelle a, und man unterſucht den Gang eines beſtimmten Elementes, von der erſten Complexion der Periode angefangen bis zur letzten, ſo ſieht man leicht ein, daß jenes Ele-

ment, welches in der erſten Complexion die Stelle a einnimmt, in der zweiten Complexion die Stelle b, in der dritten die Stelle c, und ſo fort in jeder folgenden Complexion eine andere Stelle, endlich in der mten Complexion die Stelle k, und dann in der (m + 1)ten wieder die Stelle a erhalten werde.

Eben ſo wird man das Element, welches in der erſten Complexion eine andere Stelle, z. B. c einnahm, bei der (m + 1)ten Complexion wieder in der Stelle c antreffen.

Es erhalten alſo die m bewegten Elemente der erſten Complexion in m — 1 folgenden Complexionen andere Stellen und kommen in der (m + 1)ten Complexion wieder an ihre anfänglichen Stellen zurück; daher muß jede einem einfachen Permutationsgeſetze entſprechende Periode, aus ſo viel Complexionen beſtehen, als dabei Stellen einen Wechſel der Elemente erleiden.

So enthält die Periode (16) deren Permutationsgeſetz $\binom{1234567}{7463215}$ iſt, 7 Complexionen, und die aus dem Permutationsgeſetze $\binom{1234567}{7264513} = \binom{1367}{7613}$ entſpringende Periode 4 Complexionen.

Iſt die Anzahl der Complexionen einer Periode von jener der ihre Stellen verändernden Elemente verſchieden, ſo kann, dem obigen Satze zufolge, das Permutationsgeſetz dieſer Periode nur ein zuſammengeſetztes ſeyn.

## 24.

Die Anzahl der Complexionen in einer, durch ein zuſammengeſetztes Permutationsgeſetz erzeugten, Periode iſt der kleinſten, durch die Anzahl der Complexionen, für jedes der einfachen Permutationsgeſetze, aus welchen dieſes zuſammengeſetzte beſteht, theilboren Zahl gleich.

Denn bezieht ſich das erſte dieſer einfachen Permutationsgeſetze auf $\alpha$, das zweite auf $\beta$, das dritte auf $\gamma$ Stellen u. ſ. w.

ſo werden die Elemente der $\alpha$ Stellen immer nach $\alpha$, $2\alpha$, $3\alpha$, $4\alpha$ . . . Complexionen; die Elemente der $\beta$ Stellen nach $\beta$, $2\beta$, $3\beta$, $4\beta$ . . .; die Elemente der $\gamma$ Stellen nach $\gamma$, $2\gamma$, $3\gamma$, $4\gamma$ . . . Complexionen u. ſ. f. ihre urſprünglichen Plätze wieder einnehmen. Damit alſo ſämmtliche bewegte Elemente wieder zuſammen an ihre urſprünglichen Plätze kommen, muß die Anzahl der bereits erzeugten Complexionen ſowohl ein Vielfaches von $\alpha$, als auch von $\beta$, von $\gamma$ u. ſ. w. ſeyn, d. h. durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ . . . getheilt werden können. Es wird alſo dieſes das erſtemal erfolgen, wenn ſo viel Complexionen gebildet worden ſind, als die kleinſte durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ . . . theilbare Zahl anzeigt, welche Zahl alſo auch die Anzahl der Complexionen iſt, die in der aus dem gegebenen zuſammengeſetzten Permutationsgeſetze hervorgehenden Periode enthalten ſind.

25.

Es ſeyen $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ . . . $A_r$ die Complexionen einer aus r Permutationsformen beſtehenden Periode, ſo zwar, daß wenn man dieſelbe, ihrem Permutationsgeſetze gemäß, fortgeſetzt denkt, und die dabei ſich ergebenden Complexionen durch $A_{r+1}$, $A_{r+2}$, $A_{r+3}$ . . . anzeigt,

$$A_{r+1} = A_1,\ A_{r+2} = A_2 \ldots A_{r+h} = A_h,$$

und allgemein: $A_{mr+h} = A_h$ wird.

Hebt man nun aus dieſer Periode gleichweit von einander abſtehende Complexionen $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ . . . $A_{h+\rho d}$ heraus, (wobei man, ſo oft die Stellenzahl einer Complexion die Zahl r übertrifft, dafür den Reſt ſetzt, der ſich aus der Diviſion dieſer Stellenzahl durch r ergibt, und wenn dieſer Reſt = o ausfällt, den Zeiger r beibehält) ſo entſteht $A_{h+d}$ aus $A_h$ nach demſelben Permutationsgeſetze wie $A_{h+2d}$ aus $A_{h+d}$ denn es iſt gleichgültig, ob man die Elemente einer Complexion $A_h$ gleich in die Ordnung ſtellt, welche ſie befolgen müſſen, um $A_{h+d}$ zu geben, oder ob man ſie erſt durch Zwiſchenſchritte $A_{h+1}$ $A_{h+2}$, $A_{h+3}$ . . . zu dieſer Anordnung führt. Aber der Zwi-

ment, welches in der erſten Complexion die Stelle a einnimmt, in der zweiten Complexion die Stelle b, in der dritten die Stelle c, und ſo fort in jeder folgenden Complexion eine andere Stelle, endlich in der mten Complexion die Stelle k, und dann in der (m + 1)ten wieder die Stelle a erhalten werde.

Eben ſo wird man das Element, welches in der erſten Complexion eine andere Stelle, z. B. c einnahm, bei der (m + 1)ten Complexion wieder in der Stelle c antreffen.

Es erhalten alſo die m bewegten Elemente der erſten Complexion in m — 1 folgenden Complexionen andere Stellen und kommen in der (m + 1)ten Complexion wieder an ihre anfänglichen Stellen zurück; daher muß jede einem einfachen Permutationsgeſetze entſprechende Periode, aus ſo viel Complexionen beſtehen, als dabei Stellen einen Wechſel der Elemente erleiden.

So enthält die Periode (16) deren Permutationsgeſetz $\binom{1234567}{7463215}$ iſt, 7 Complexionen, und die aus dem Permutationsgeſetze $\binom{1234567}{7264513} = \binom{1367}{7613}$ entſpringende Periode 4 Complexionen.

Iſt die Anzahl der Complexionen einer Periode von jener der ihre Stellen verändernden Elemente verſchieden, ſo kann, dem obigen Satze zufolge, das Permutationsgeſetz dieſer Periode nur ein zuſammengeſetztes ſeyn.

## 24.

Die Anzahl der Complexionen in einer, durch ein zuſammengeſetztes Permutationsgeſetz erzeugten, Periode iſt der kleinſten, durch die Anzahl der Complexionen, für jedes der einfachen Permutationsgeſetze, aus welchen dieſes zuſammengeſetzte beſteht, theilboren Zahl gleich.

Denn bezieht ſich das erſte dieſer einfachen Permutationsgeſetze auf $\alpha$, das zweite auf $\beta$, das dritte auf $\gamma$ Stellen u. ſ. w.

so werden die Elemente der $\alpha$ Stellen immer nach $\alpha$, $2\alpha$, $3\alpha$, $4\alpha$ . . . Complexionen; die Elemente der $\beta$ Stellen nach $\beta$, $2\beta$, $3\beta$, $4\beta$ . . .; die Elemente der $\gamma$ Stellen nach $\gamma$, $2\gamma$, $3\gamma$, $4\gamma$ . . . Complexionen u. s. f. ihre ursprünglichen Plätze wieder einnehmen. Damit also sämmtliche bewegte Elemente wieder zusammen an ihre ursprünglichen Plätze kommen, muß die Anzahl der bereits erzeugten Complexionen sowohl ein Vielfaches von $\alpha$, als auch von $\beta$, von $\gamma$ u. s. w. seyn, d. h. durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ . . . getheilt werden können. Es wird also dieses das erstemal erfolgen, wenn so viel Complexionen gebildet worden sind, als die kleinste durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ . . . theilbare Zahl anzeigt, welche Zahl also auch die Anzahl der Complexionen ist, die in der aus dem gegebenen zusammengesetzten Permutationsgesetze hervorgehenden Periode enthalten sind.

25.

Es seyen $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ . . . $A_r$ die Complexionen einer aus r Permutationsformen bestehenden Periode, so zwar, daß wenn man dieselbe, ihrem Permutationsgesetze gemäß, fortgesetzt denkt, und die dabei sich ergebenden Complexionen durch $A_{r+1}$, $A_{r+2}$, $A_{r+3}$ . . . anzeigt,

$$A_{r+1} = A_1,\ A_{r+2} = A_2 \ldots A_{r+h} = A_h,$$

und allgemein: $A_{mr+h} = A_h$ wird.

Hebt man nun aus dieser Periode gleichweit von einander abstehende Complexionen $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ . . . $A_{h+\varrho d}$ heraus, (wobei man, so oft die Stellenzahl einer Complexion die Zahl r übertrifft, dafür den Rest setzt, der sich aus der Division dieser Stellenzahl durch r ergibt, und wenn dieser Rest = o ausfällt, den Zeiger r beibehält) so entsteht $A_{h+d}$ aus $A_h$ nach demselben Permutationsgesetze wie $A_{h+2d}$ aus $A_{h+d}$ denn es ist gleichgültig, ob man die Elemente einer Complexion $A_h$ gleich in die Ordnung stellt, welche sie befolgen müssen, um $A_{h+d}$ zu geben, oder ob man sie erst durch Zwischenschritte $A_{h+1}$ $A_{h+2}$, $A_{h+3}$ . . . zu dieser Anordnung führt. Aber der Zwi-

ſchenſchritte, um aus $A_h$ durch $A_{h+1}$, $A_{h+2}$, $A_{h+3}$ . . . auf $A_{h+d}$ zu kommen, ſind ſo viele, als jene, welche von $A_{h+d}$ durch $A_{h+d+1}$, $A_{h+d+2}$, $A_{h+d+3}$ . . . auf $A_{h+2d}$ leiten, und alle dieſe Zwiſchenſchritte erfolgen nach demſelben Geſetze. Es entſteht alſo $A_{h+2d}$ aus $A_{h+d}$, folglich auch $A_{h+3d}$ aus $A_{h+2d}$, ferner $A_{h+4d}$ aus $A_{h+3d}$ u. ſ. w. nach demſelben Geſetze, wie $A_{h+d}$ aus $A_h$, daher bilden die Complexionen $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ . . . für ſich wieder eine beſondere Periode.

## 26.

Um nun die Anzahl der in dieſer neuen Periode liegenden Complexionen kennen zu lernen, bedenke man, daß der Zeiger der Complexion, welche in der Reihe $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ . . . wieder der anfänglichen $A_h$ gleich wird, die Form $A_{h+\varrho d}$ haben werde, wobei $\varrho$ die Anzahl der Complexionen anzeigt, welche der $A_{h+\varrho d}$ vorangehen. Da aber die Complexionen $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ . . . aus der Periode $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ . . . $A_r$ herrühren, ſo muß der Zeiger einer der $A_h$ gleichen Complexion auch die Form $mr+h$ haben, wobei m eine noch unbeſtimmte Zahl bedeutet; daraus folgt $h+\varrho d = mr+h$, alſo $\varrho d = mr$, welche Gleichung die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Complexion $A_{h+\varrho d} = A_h$ wird.

Der kleinſte Werth von $\varrho$, welcher dieſer Gleichung Genüge leiſtet, gibt daher die Anzahl der Complexionen an, aus welchen die Periode $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ . . . beſteht. Da $\varrho = \frac{mr}{d}$ ſeyn muß, ſo ſetze man für $mr$ die kleinſte durch r und d zugleich theilbare Zahl; der Quotient, welchen dieſe Zahl durch d getheilt läßt, iſt die Anzahl der in der Frage ſtehenden Complexionen.

Haben die Zahlen r und d außer der Einheit keinen gemeinſchaftlichen Theiler, ſo iſt $rd$ die kleinſte durch r und d

theilbare Zahl, folglich $\varrho = r$. In dieſem Falle beſteht die Periode $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ ... aus allen, aber nur in eine veränderte Ordnung geſtellten, Complexionen der Periode $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ ... $A_r$. Dieſer Fall tritt, wenn r eine Primzahl iſt, für jedes d ein.

Haben aber r und d ein von 1 verſchiedenes gemeinſchaftliches Maß, ſo iſt die kleinſte durch r und d theilbare Zahl kleiner, als das Product r d, folglich $\varrho < r$. Dann beſteht die Periode $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ .... nur aus einigen der in der Periode $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ ... $A_r$ vorkommenden Complexionen.

## 27.

Liegt der gegebenen Periode $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ ... $A_r$ ein einfaches Permutationsgeſetz zum Grunde, und beſteht die aus derſelben herausgehobene Periode $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ ... aus eben ſo viel Complexionen, als die gegebene, ſo herrſcht auch in der neuen Periode ein einfaches Permutationsgeſetz. Denn wäre es zuſammengeſetzt, ſo müßten in allen Complexionen der neuen Periode gewiſſe der bewegten Elemente nur eine Reihe beſonderer durch ein partielles einfaches Permutationsgeſetz beſtimmter Plätze, nicht aber alle Stellen, deren Elemente gewechſelt werden, einnehmen können; daher müßte, weil die neue Periode dieſelben Complexionen, wie die gegebene, nur in einer andern Ordnung, enthält, dieſes auch für alle Complexionen der gegebenen Periode gelten, gegen die Vorausſetzung eines ihr zum Grunde liegenden einfachen Permutationsgeſetzes.

Beſteht aber die neue Periode $A_h$, $A_{h+d}$, $A_{h+2d}$, $A_{h+3d}$ ... aus weniger Complexionen, als die nach einem einfachen Permutationsgeſetze erzeugte urſprüngliche $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ ... $A_r$, ſo iſt erſtere einem zuſammengeſetzten Permutationsgeſetze unterworfen, denn bei derſelben iſt die Anzahl der Complexionen

kleiner, als die Anzahl der unter einander vertauſchten Elemente. (23)

Geht die gegebene Periode aus einem zuſammengeſetzten Permutationsgeſetze hervor, ſo iſt eine durch gleichweit von einander abſtehende Complexionen derſelben gebildete neue Periode, wenn ſie eben ſo viel Complexionen als erſtere enthält, auch nach einem zuſammengeſetzten Permutationsgeſetze erzeugt, weil hier nicht jedes bewegte Element in alle Stellen kömmt, deren Elemente verwechſelt werden. Beſteht aber die neue Periode aus weniger Complexionen, als die gegebene, ſo kann ihr auch ein einfaches Permutationsgeſetz entſprechen.

28.

Es ſey die Complexion $A_2$ aus $A_1$ nach einem, ſich über mehr als zwei Stellen erſtreckenden, einfachen Permutationsgeſetze abgeleitet worden. Man bilde nun aus $A_2$, nach einem andern, dieſelben Stellen in Anſpruch nehmenden, einfachen Permutationsgeſetze, die Complexion $A_3$, ſo wird $A_3$ mit $A_1$ identiſch, ſobald man in $A_2$, von irgend einem der ihre Stellen wechſelnden Elemente anfangend, jedes derſelben in die Stelle bringt, die es früher in $A_1$ einnahm.

Setzt man aber einige dieſer Elemente an andere Stellen, ſo wird $A_3$ mit $A_1$ nur in Bezug auf die Beſetzung gewiſſer Stellen übereinſtimmen, in andern Stellen aber davon abweichen.

Es iſt nicht möglich $A_3$ aus $A_2$ nach einem einfachen Permutationsgeſetze ſo abzuleiten, daß dieſe Complexion mit $A_1$ nicht identiſch wird, jedoch ſich davon bloß in der Beſetzung von weniger als drei Stellen unterſcheidet; immer kann aber aus $A_2$ eine Complexion $A_3$ nach einem einfachen Permutationsgeſetze gebildet werden, welche ſich von $A_1$ bloß in der Beſetzung dreier gegebener Stellen entfernt.

Die Richtigkeit dieſer Behauptung ergibt ſich aus folgenden Betrachtungen.

Es seyen a, b, c die Elemente, welche die drei bezeichneten Stellen in $A_1$ einnehmen, an deren Statt in $A_2$ die Elemente f, m, t stehen mögen Um nun $A_3$ aus $A_2$ hervorgehen zu lassen, hebe man in der letztern Complexion das Element f aus seiner Stelle, und setze es dorthin, wo es in $A_1$ stand, und wo sich nun in $A_2$ das Element g befinde, welches gegenwärtig dadurch aus seiner Stelle verdrängt wird. Man bringe g ebenfalls an die Stelle, wo es sich in $A_1$ befand, und verdränge hiedurch h, u. s. w., so kann das Element a nicht eher an die Reihe kommen, als b und c berührt worden sind. Wird nämlich h an seine ursprüngliche Stelle gesetzt, und so mit jedem fernerhin aus seiner Stelle verdrängten Elemente fortgefahren, und man kommt endlich auf l, welches an die ihm in $A_1$ gehörende Stelle gesetzt, a verdrängt, ehe noch b oder c berührt wurde, so stehen in $A_2$ die Elemente

f, g, h . . . l, a

an den Stellen, in welchen sich in $A_1$ die Elemente

a, f, g . . . . l

befinden; daher hat sich das einfache Permutationsgesetz, durch welches $A_2$ aus $A_1$ entsprungen ist, bloß auf die Elemente a, f, g . . . . l und nicht auch auf b und c erstreckt, gegen die Voraussetzung. Man wird also obigem Verfahren gemäß, auf jedes andere Element, wie z. B. auf b oder c, eher stoßen, als auf a. Es sey b das sich zunächst darbietende Element. Man kann nun b nicht an die Stelle setzen, in welcher in $A_1$ das Element a, oder in $A_2$ das Element f sich befindet, ohne die Forderung außer Acht zu lassen, daß $A_3$ aus $A_2$ nach einem einfachen Permutationsgesetze entspringe, welches alle schon früher (nämlich bei der Ableitung von $A_2$ aus $A_1$) aus ihren Stellen gehobenen Elemente umfaßt; denn es kämen die Elemente

b, f, g . . . . l

an die Stellen, welche in $A_2$ durch

f, g, h . . . l, b

beſetzt werden, es hätten alſo die Elemente b, f, g . . . . l unter ſich allein, mit Uebergehung des doch ſchon früher in Bewegung geſetzten c, ihre Stellen gewechſelt. Es bleibt daher, wenn man b nicht an ſeinen urſprünglichen Platz ſetzen will, nichts anderes zu thun übrig, als es in die urſprüngliche Stelle irgend eines andern Elementes c zu bringen. Wenn nun das hiedurch verdrängte Element t, und jedes der folgenden, an ſeinen anfänglichen Platz zurückgeſetzt wird, ſo kann aus dem oben angeführten Grunde c nicht an die Reihe kommen, bevor nicht a aus ſeinem Platze verdrängt wird; auch darf a wegen der Forderung, daß $A_3$ aus $A_2$ nach einem einfachen, alle bei der Entſtehung von $A_2$ aus $A_1$ in Bewegung geſetzten Elemente in Anſpruch nehmenden Permutationsgeſetze hervorgehe, nicht an den Platz kommen, welchen es in $A_1$ einnahm, ſondern das Element a muß einen andern Platz erhalten. Immer iſt es aber verſtattet, a an den urſprünglichen Platz von c zu ſetzen und in der Operation fortzufahren, bis endlich auch c an die Reihe kommt, welches Element den anfänglichen Platz von a erhält.

Man ſieht hieraus, daß es nicht angeht, bei der nach obiger Forderung zu vollziehenden Bildung von $A_3$ aus $A_2$, alle Elemente, bis auf zwei, wie a und b, oder b und c, an die Plätze zu ſetzen, welche ſie in $A_1$ inne hatten, und nur die beiden genannten Elemente gegenſeitig zu vertauſchen; daß es aber immer möglich iſt, dieſe Vertauſchung mit jeden drei beliebigen, der bei der Entſtehung von $A_2$ aus $A_1$ aus ihren Stellen gebrachten Elemente, wie a, b, c ſind, vorzunehmen.

Eine gegenſeitige Vertauſchung dreier Elemente a, b, c iſt nur auf zwei Arten möglich; es kommt nämlich entweder c an die Stelle von a, a an jene von b, b an jene von c; oder es kommt b an die Stelle von a, c an jene von b, a an jene von c. Da die Ordnung, in welcher die Elemente der Complexion $A_2$, indem daraus $A_3$ erzeugt wird, aus ihren Plätzen

verdrängt werden, ſtets dieſelbe iſt, man mag was immer für ein Element zuerſt aus ſeinem Platze herausheben, ſo kann dieſe gegenſeitige Vertauſchung der bezeichneten drei Elemente in $A_3$ nur eine der beiden angeführten Formen annehmen; welche? hängt von der Art und Weiſe ab, wie $A_2$ aus $A_1$ entſtanden iſt, die es bedingt, ob in dem obigen Falle, nach der Bewegung des den urſprünglichen Platz von a einnehmenden Elementes f, zuerſt b, oder zuerſt c an die Reihe kommt. Man kann aber immer das einfache Permutationsgeſetz, nach welchem $A_2$ aus $A_1$ entſteht, ſo wählen, daß in $A_3$ eine beſtimmte der angegebenen zwei Vertauſchungsformen jener drei Elemente zum Vorſchein kommt. Läßt man $A_2$ aus $A_1$ dadurch entſtehen, daß man jedes Element der Complexion $A_1$ um eine Stelle weiter gegen die Rechte, oder gegen die Linke rückt, indem man die erſte Stelle als eine ſich unmittelbar an die letzte anſchließende betrachtet, ſo wird die Ordnung a, b, c für $A_3$, im erſten Falle in b, c, a und im zweiten Falle in c, a, b übergehen.

## Das Combiniren.

### 29.

Gegebene Elemente **combiniren** im **engern** Sinne des Wortes oder **verbinden**, heißt aus denſelben, ſo oft es angeht, gleichviel, aber jedesmal andere Elemente herausheben und zu einer Complexion vereinigen.

Die Menge der Elemente, aus welchen jede einzelne Complexion, die hier insbeſondere eine **Combinationsform**, **Combination** oder Verbindung, genannt wird, beſtehen ſoll, beſtimmt die **Combinations-Klaſſe**, und der numeriſche Ausdruck dieſer Menge heißt der **Klaſſenexponent**. Man pflegt die Combinationen der erſten, zweiten, dritten, vierten Klaſſe u. ſ. w. auch **Unionen**, **Amben**, **Ternen**, **Quaternen** u. ſ. w. zu nennen.

Wenn bei dem Combiniren gegebener Elemente jedes so oft gesetzt werden darf, als man es setzen kann, d. h. so oft, als der vorgeschriebene Klassenexponent Einheiten enthält, so sagt man, die Elemente werden mit uneingeschränkten Wiederholungen, oder auch schlechtweg, mit Wiederholungen, combinirt. Darf aber die Anzahl der Wiederholungen eines oder mehrerer Elemente nicht über gewisse Grenzen hinausgehen, so wird mit eingeschränkten Wiederholungen combinirt.

30.

Obschon es auf die Ordnung, in welcher die Elemente bei dem Combiniren aneinandergefügt werden, gar nicht ankommt, da zwei Combinationsformen einander gleich gelten, wenn sie nur dieselben Elemente enthalten, so wollen wir doch, um hier die Anwendung der allgemeinen, in 8 gegebenen Vorschriften möglich zu machen, festsetzen, daß die Elemente in jeder einzelnen Complexion ihrer Rangordnung (6) gemäß aufeinanderfolgen, also die niedrigern Elemente vorangehende, die höhern nachfolgende Stellen einnehmen.

Unter dieser Voraussetzung wird von sämmtlichen, zu irgend einer Klasse gehörenden Combinationen, die niedrigste offenbar jene seyn, in welcher die niedrigsten der gegebenen Elemente in der festgesetzten Anzahl vorkommen; aus jeder einzelnen Combination wird aber die nächsthöhere abgeleitet, wenn man die letzte Stelle aufsucht, in welche ein höheres Element, als bereits in ihr steht, gesetzt werden kann; das nächsthöhere in diese Stelle bringt, und alle folgenden Stellen, mit den sich an das so eben genommene Element, der natürlichen Ordnung gemäß, unmittelbar anschließenden Elementen, jede erlaubte Wiederholung benützend, ausfüllt.

Es sey z. B. für die Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die Quinterne 23578 gegeben, und die nächsthöhere Quinterne zu bilden, so ist hier die dritte Stelle offenbar die letzte, in welche

ein höheres Element geſetzt werden kann; das nächſthöhere iſt 6, und die darauf folgenden Elemente ſind 7 und 8, daher iſt 23678 die verlangte Quinterne.

So iſt man nun im Stande, alle zu einer beſtimmten Klaſſe gehörigen Combinationen, nach und nach, wohlgeordnet abzuleiten. Mit der Complexion, in welcher die höchſten der gegebenen Elemente vorkommen, iſt die Arbeit beendigt.

## Beiſpiele.

I. Combinationen der vierten Klaſſe ohne Wiederholuugen für die Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 4 5
1 2 4 6
1 2 5 6
1 3 4 5
1 3 4 6
1 3 5 6
1 4 5 6
2 3 4 5
2 3 4 6
2 3 5 6
2 4 5 6
3 4 5 6.

II. Combinationen der vierten Klaſſe mit Wiederholungen für die Elemente 1, 2, 3.

1 1 1 1
1 1 1 2
1 1 1 3
1 1 2 2
1 1 2 3
1 1 3 3
1 2 2 2
1 2 2 3
1 2 3 3
1 3 3 3
2 2 2 2
2 2 2 3
2 2 3 3
2 3 3 3
3 3 3 3.

31.

Um die Menge der Complexionen zu finden, welche bei dem Combiniren ungleicher Elemente zu einer feſtgeſetzten Klaſſe entſtehen, muß man unterſcheiden, ob ohne Wiederholungen oder ob mit Wiederholungen combinirt wird.

Erſter Fall. Es ſey die Menge der Combinationen n

verſchiedener Elemente ohne Wiederholungen für die kte Klaſſe zu ſuchen, wobei k nie größer ſeyn kann, als n.

Da wir im Folgenden ſehr häufig Gelegenheit haben werden, von dem numeriſchen Ausdrucke dieſer Menge Gebrauch zu machen, ſo wollen wir dafür das Zeichen $\binom{n}{k}$ wählen, und es mit den Worten n über k ausſprechen, wobei die obere Zahl ſtets die Anzahl der combinirten Elemente, die untere aber den Rang der Combinationsklaſſe angibt.

Man denke ſich alle Combinationen der n Elemente zur nächſtvorhergehenden $(k-1)$ten Klaſſe gebildet, und jede einzelne der hiebei Statt findenden $\binom{n}{k-1}$ Complexionen, mit jedem der in ihr nicht vorkommenden $n-(k-1)$ Elemente verbunden, ſo ergeben ſich $\binom{n}{k-1}[n-(k-1)]$ Complexionen, welche ſämmtlich der kten Klaſſe angehören, und unter welchen jede denkbare Combination dieſer Klaſſe genau kmal erſcheint. Jede Combination der kten Klaſſe kann nämlich, indem man ſich ſtets ein anderes ihrer Elemente davon getrennt vorſtellt, auf k verſchiedene Arten durch Vereinigung einer $(k-1)$ ſtelligen Complexion mit einem einfachen Elemente erzeugt werden; welche auch immer dieſe $(k-1)$ ſtellige Complexion ſey, ſo mußte ſie ſich jedesmal unter obigen Combinationen der $(k-1)$ten Klaſſe befinden, und indem ſie mit allen in ihr nicht vorkommenden $n-(k-1)$ Elementen Verbindungen einging, auch jenes einzelne Element mit aufnehmen. Es iſt demnach die Anzahl aller verſchiedenen Combinationen von n Elementen zur kten Klaſſe

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-(k-1)}{k}.$$

Allein in der erſten Combinationsklaſſe ſteht jedes Element bloß einzeln, daher iſt $\binom{n}{1} = n$, alſo für

$$k = 2,\ \binom{n}{2} = \binom{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$$

$$k = 3,\ \binom{n}{3} = \binom{n}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$k = 4,\ \binom{n}{4} = \binom{n}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

u. ſ. w.

und allgemein

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(k-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ k}$$

Beiſpiel. Für die gewöhnliche Zahlen-Lotterie zu 90 Nummern iſt

die Anzahl aller möglichen Amben

$$= \frac{90.89}{1.\ 2} = 4005;$$

die Anzahl der Ternen

$$= \frac{90.89.88}{1.\ 2.\ 3} = 117480;$$

die Anzahl der Quaternen

$$= \frac{90.89.88.87}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2555190;$$

endlich die Anzahl der Quinternen

$$= \frac{90.89.88.87.86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 43949268.$$

Zweiter Fall. Es iſt die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur kten Klaſſe mit uneingeſchränkten Wiederholungen zu beſtimmen, wobei k ſo groß ſeyn kann, als man will.

Man bezeichne die verlangte Anzahl einſtweilen durch $C_k$, und denke ſich alle Combinationen mit Wiederholungen der gegebenen n Elemente zur nächſtvorhergehenden $(k-1)$ten Klaſſe gebildet, ſo wird die Anzahl derſelben, der angenommenen Bezeichnung gemäß, durch $C_{k-1}$ vorgeſtellt. Man verbinde jede

der $C_k$ Complexionen nach und nach mit allen gegebenen Elementen, und noch überdieß mit jedem der in ihr vorkommenden $k-1$ Elemente, so erhält man $C_{k-1}(n+k-1)$ Complexionen, welche sämmtlich zur kten Klasse gehören. Darunter ist jede mögliche Combination der n Elemente mit Wiederholungen genau kmal enthalten. Sie ist nämlich obigem Verfahren gemäß, wegen einer jeden in ihr etwa vorkommenden Gruppe von $\alpha$ gleichen Elementen, $\alpha$mal entstanden, indem sie, nach Absonderung eines der $\alpha$ Elemente, eine $(k-1)$stellige Complexion zurückläßt, welche dieses Element $(\alpha-1)$ mal enthält, und gewiß in obiger $(k-1)$ten Combinationsklasse vorhanden ist. Diese wurde mit dem abgesonderten Elemente einmal, in so fern es unter die n gegebenen Elemente gehört, und $(\alpha-1)$ mal, in so fern es unter den eigenen Elementen der $(k-1)$stelligen Complexion begriffen ist; also in allem $\alpha$mal verbunden. Da dieses eben so von den andern Elementen gesagt werden kann, so entsteht jede Complexion der kten Klasse so oft, als Elemente darin enthalten sind, d. h. kmal. Man hat daher

$$C_k = C_{k-1} \cdot \frac{n+k-1}{k}.$$

Aber auch hier ist $C_1 = n$, folglich

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{1.\ 2.}$$

$$C_3 = C_2 \cdot \frac{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$C_4 = C_3 \cdot \frac{n+3}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

u. s. w.

und überhaupt

$$C_k = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ k}.$$

Nach den oben gegebenen Formeln ist die Anzahl der Combinationen von $n + k - 1$ Elementen zur kten Klasse ohne Wiederholungen, nämlich

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)\,n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots (k-1)\,k}$$

folglich $C_k = \binom{n+k-1}{k}$

d. h. die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur kten Klasse mit Wiederholungen, ist gleich der Anzahl der Combinationen von $n + k - 1$ Elementen zur kten Klasse ohne Wiederholungen.

Man sehe 30, Beispiel I und II.

32.

Wenn man bei dem Combiniren n ungleicher Elemente ohne Wiederholungen zur kten Klasse, auf die $n - k$ Elemente sieht, welche zur Bildung jeder einzelnen Complexion nicht verwendet werden, so überzeugt man sich leicht, daß sie alle Combinationen der n Elemente zur $(n - k)$ten Klasse in verkehrter Ordnung darstellen. Es bleiben nämlich immer andere Elemente zurück, und zwar höhere, wenn zur Bildung gedachter Complexionen niedrigere genommen wurden und umgekehrt. Zwei Combinationsklassen, deren Zeiger sich zur Anzahl der Elemente ergänzen, enthalten daher gleichviel Complexionen, oder es ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dieselbe Folgerung ergibt sich aus den Formeln

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k)}$$

C

wovon die zweite aus der ersten folgt, wenn man daselbst $n-k$ statt $k$ setzt. Denn diese Ausdrücke auf einerlei Nenner

$$1.2.3\ldots k.\ 1.2.3\ldots(n-k)$$

gebracht, erhalten auch einerlei Zähler, nämlich das Product der natürlichen Zahlen von 1 bis $n$, und sind also einander gleich.

Man wird daher zur Berechnung der in der $k$ten Combinationsklasse von $n$ Elementen enthaltenen Menge der Complexionen, entweder die erste oder die zweite Formel wählen, je nachdem $k < n-k$, oder $k > n-k$, d. h. je nachdem $k < \frac{n}{2}$ oder $k > \frac{n}{2}$ ist, wodurch unnöthige, sich ohnehin tilgende Factoren im Zähler und Nenner vermieden werden. Ist $k = \frac{n}{2}$ so fallen beide Formeln zusammen.

## 33.

Wenn man jene Combinationsformen von $n$ Elementen ohne oder mit Wiederholungen zusammenstellt, in welchen ein bestimmtes Element vorkommt, und dann dieses Element absondert, so bleiben, bei nicht wiederholbaren Elementen, alle Combinationsformen der übrigen $n-1$ Elemente; bei unbeschränkt wiederholbaren Elementen, alle Combinationsformen sämmtlicher $n$ Elemente, zur nächstvorhergehenden $(k-1)$ten Klasse zurück. Denn fehlte eine solche Form, oder wäre sie mehrere Male vorhanden, so müßte unter den Combinationen der $k$ten Klasse auch die Form fehlen oder öfter vorkommen, welche aus dem abgesonderten Elemente und jener fehlenden oder wiederholten Form der $(k-1)$ten Klasse besteht. Es ist daher die Anzahl der Combinationsformen von $n$ Elementen zur $k$ten Klasse, in welchen ein bestimmtes Element vorkommt, wenn ohne Wiederholungen combinirt wird $= \binom{n-1}{k-1}$,

wenn mit Wiederholungen combinirt wird

$$= \binom{n+k-2}{k-1}.$$

Hebt man nun bei dem Combiniren ohne Wiederholungen alle Formen, in welchen das erste Element erscheint, heraus, dann jene, in welchen das zweite, jene, in welchen das dritte Element enthalten ist u. s. w., so hat man $n\binom{n-1}{k-1}$ Complexionen. Aber hiebei wird jede denkbare Combinationsform der kten Klasse wegen eines jeden ihrer Elemente einmal, also in allem kmal gesetzt; daher hat man für die Anzahl aller verschiedenen Combinationen von n Elementen zur kten Klasse die Gleichung

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

oder

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

aus welcher sich die bereits in 31 Erst. Fall, für die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen gefundenen Formeln ebenfalls ableiten lassen.

34.

Die Combinationsformen von n Elementen zur kten Klasse, in welchen ein bestimmtes Element nicht vorkommt, bilden zusammen offenbar die kte Klasse für die übrigen $n-1$ Elemente. Daher ist ihre Anzahl bei nicht wiederholten Elementen $= \binom{n-1}{k}$ bei unbeschränkt wiederholten $= \binom{n+k-2}{k}$.

Nimmt man alle Combinationsformen der n Elemente zur kten Klasse ohne Wiederholungen, in welchen das erste Element nicht vorkommt, dann jene, in welchen das zweite, das dritte Element u. s. w. nicht erscheint, zusammen, so hat man den Inbegriff aller Combinationen der n Elemente zur kten

Klaſſe (n — k)mal. Es wird nämlich in den durch obiges Verfahren erhaltenen n Parthien von Complexionen, jede zur kten Klaſſe gehörende Combinationsform der n Elemente wegen eines jeden ihrer Elemente einmal, daher in allem kmal weggelaſſen, folglich (n — k)mal geſetzt. Dieß führt auf die Gleichung

$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$$

oder

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$

35.

Die Anzahl aller Combinationen der kten Klaſſe für n Elemente wird erhalten, wenn man zur Anzahl der Complexionen, in welchen ein beſtimmtes Element vorkommt, die Anzahl jener hinzufügt, in welchen dieſes Element fehlt; man hat alſo die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

36.

Die Aufgabe, die Anzahl der Combinationen von n verſchiedenen Elementen zur kten Klaſſe zu beſtimmen, iſt noch einer Erweiterung fähig. Man kann fragen, auf wie viel verſchiedene Arten ſich n Elemente in mehrere Parthien ſo vertheilen laſſen, daß die erſte Parthie $\alpha$, die zweite $\beta$, die dritte $\gamma$ u. ſ. w. die vorletzte $\lambda$, die letzte $\mu$ Elemente enthält, wobei

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda + \mu = n$$

angenommen wird.

Wenn man vor der Hand bloß auf die $\alpha$ Elemente ſieht, welche in die erſte Parthie kommen, ohne ſich um die Anordnung der übrigen $n - \alpha$ Elemente zu bekümmern, ſo kann man ſo oft $\alpha$ andere Elemente nehmen, als ſich n Elemente zu $\alpha$ combiniren laſſen, das iſt $\binom{n}{\alpha}$mal. Bei jedem einzelnen

der $\binom{n}{\alpha}$ Fälle hebe man aus den übrigen $n-\alpha$ Elementen noch $\beta$ Elemente für die zweite Parthie heraus, so kann dieß auf $\binom{n-\alpha}{\beta}$ Arten geschehen, und man hat, in so fern $\alpha$ Elemente in die erste und zugleich $\beta$ Elemente in die zweite Parthie kommen, ohne Rücksicht auf die übrigen Parthien, $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}$ Fälle. Aber hiebei bleiben jedesmal $n-(\alpha+\beta)$ Elemente zurück, aus welchen sich noch $\binom{n-(\alpha+\beta)}{\gamma}$mal $\gamma$ Elemente in die dritte Parthie setzen lassen, wodurch man die vorigen Fälle wieder vervielfältigt, also in allem

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-(\alpha+\beta)}{\gamma}$$

verschiedene Anordnungen erhält. So kann man fortschließen, bis man auf die vorletzte Parthie kommt; für sie und für die letzte bleiben, bei jeder einzelnen Vertheilung der Elemente in die vorigen Parthien, noch $\lambda+\mu$ Elemente übrig, aus welchen man auf $\binom{\lambda+\mu}{\lambda}$ Arten $\lambda$ Elemente für die vorletzte, und folglich die übrigen $\mu$ Elemente für die letzte Parthie verwenden kann.

Es wird also die Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche man aus den $n$ Elementen $\alpha$ für die erste, $\beta$ für die zweite, $\gamma$ für die dritte u. s. w. $\lambda$, $\mu$ für die beiden letzten Parthien nehmen kann, durch das Product

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-(\alpha+\beta)}{\gamma}\ldots\binom{\lambda+\mu}{\lambda}$$

ausgedrückt.

Allein es ist:

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(\alpha-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\alpha}$$

und wenn man Zähler und Nenner durch 1. 2. 3 ... $(n-\alpha)$ multiplicirt,

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{1.2.3 \ldots (n-1)n}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots (n-\alpha)} = \frac{n!}{\alpha!\,(n-\alpha)!}$$

Eben so folgt:

$$\binom{n-\alpha}{\beta} = \frac{(n-\alpha)!}{\beta!\,(n-[\alpha+\beta])!}$$

$$\binom{n-(\alpha+\beta)}{\gamma} = \frac{[n-(\alpha+\beta)]!}{\gamma!\,[n-(\alpha+\beta+\gamma)]!}$$

u. s. w.

$$\binom{\lambda+\mu}{\lambda} = \frac{(\lambda+\mu)!}{\lambda!\;\mu!}$$

Das Product dieser Ausdrücke, und daher auch die Anzahl der hier betrachteten Vertheilungsarten der Elemente ist

$$= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\;\text{ꝛc.}\;\lambda!\,\mu!}$$

37.

Diese Zahl gibt auch, wie in 12 gezeigt wurde, die Menge der Versetzungen für n Elemente an, worunter sich $\alpha$ gleiche, $\beta$ andere gleiche, $\gamma$ noch andere gleiche u. s. w. befinden. In der That läßt sich die Auflösung der obigen Aufgabe auch auf die Betrachtung der Permutationen gründen.

Man denke sich nämlich alle n! Versetzungen der n Elemente untereinander gestellt und hinter der $\alpha$ten Stelle, dann um $\beta$ Stellen weiter, dann wieder um $\gamma$ Stellen weiter ... durch alle Complexionen verticale Striche geführt, so hat man gewiß alle Complexionen, welche in die erste, zweite, dritte... Parthie gehören, von einander gesondert. Allein hier müssen alle Gruppirungen, die sich nur durch eine veränderte Stellung der zu einer und derselben Parthie genommenen Elemente unterscheiden, für eine Complexion gerechnet werden, die so oft wiederholt dasteht, als sich die Elemente gedachter Parthie ver-

ſetzen laſſen; man hat daher, um die Anzahl aller wirklich verſchiedenen Gruppirungsweiſen der n Elemente für den Fall zu erhalten, daß $\alpha$ Elemente in der erſten, $\beta$ in der zweiten, $\gamma$ in der dritten . . . Parthie vorkommen ſollen, die Zahl $n!$ durch die Producte $\alpha!$, $\beta!$, $\gamma!$ ꝛc. zu theilen, wodurch ſich dasſelbe Reſultat, wie oben, ergibt.

Durch dieſe Betrachtungen hätte man auch die Anzahl der Combinationen finden können, welche n verſchiedene Elemente zur kten oder auch (n—k)ten Klaſſe zulaſſen. Es handelt ſich hiebei offenbar um die Anzahl der Arten, auf welche n Elemente in zwei Parthien vertheilt werden können, ſo daß die eine, ſo oft es angeht, k Elemente, die andere n — k Elemente erhält.

## 38.

Dieſer Gegenſtand läßt ſich nun leicht in größerer Allgemeinheit behandeln.

Es ſeyen mehrere Reihen von ungleichen Elementen vorhanden, wovon die erſte a, die zweite b, die dritte c Elemente u. ſ. w. enthält. Man ſoll ausmitteln, auf wie viel verſchiedene Arten dieſe Elemente in mehrere Parthien vertheilt werden können, ſo daß die erſte Parthie $\alpha_1$ Elemente aus der erſten Reihe, $\beta_1$ aus der zweiten, $\gamma_1$ aus der dritten Reihe u. ſ. w., ferner die zweite Parthie $\alpha_2$ Elemente aus der erſten Reihe, $\beta_2$ aus der zweiten, $\gamma_2$ aus der dritten erhält u. ſ. w., wobei für die Anzahl der Elemente, welche dieſe Reihen in die dritte, vierte . . . Parthie abgeben, analoge Zeichen gelten, und vorausgeſetzt wird, daß

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = a$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots = b$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots = c$$

u. ſ. w. iſt.

Hebt man bloß aus der erſten Reihe $\alpha_1$ Elemente für die erſte Parthie, $\alpha_2$ Elemente für die zweite, $\alpha_3$ Elemente für

die dritte Parthie heraus u. ſ. w., ſo kann dieß auf $\frac{a}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \alpha_3 ! \text{ ꝛc.}}$ Arten geſchehen.

Eben ſo kann man auf $\frac{b!}{\beta_1 ! \beta_2 ! \beta_3 ! \text{ ꝛc.}}$ Arten aus der zweiten Reihe $\beta_1$ Elemente für die erſte, $\beta_2$ für die zweite, $\beta_3$ für die dritte Parthie u. ſ. w., ferner aus der dritten Reihe auf $\frac{c!}{\gamma_1 ! \gamma_2 ! \gamma_3 ! \text{ ꝛc.}}$ Arten $\gamma_1$ Elemente für die erſte, $\gamma_2$ für die zweite, $\gamma_3$ für die dritte Parthie nehmen u. ſ. w.

Allein jede Anordnung der Elemente der erſten Reihe kann mit jeder Anordnung der Elemente der zweiten Reihe, und jede Anordnung der Elemente der erſten zwei Reihen kann mit jeder Anordnung der Elemente der dritten Reihe combinirt werden u. ſ. w. Es wird alſo die Anzahl der Arten, auf welche man die Elemente aller Reihen, obigen Bedingungen gemäß, in die verſchiedenen Parthien vertheilen kann, durch das Product

$$\frac{a!}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \alpha_3 ! \text{ ꝛc.}} \cdot \frac{b!}{\beta_1 ! \beta_2 ! \beta_3 ! \text{ ꝛc.}} \cdot \frac{c!}{\gamma_1 ! \gamma_2 ! \gamma_3 ! \text{ ꝛc.}} \text{ ꝛc.}$$

ausgedrückt.

Beiſpiel. Es ſeyen 12 Kugeln in drei Fächer ſo zu vertheilen, daß hievon 3 in das erſte Fach, 4 in das zweite, und 5 Kugeln in das dritte kommen, ſo kann dieß, nach 36, auf

$$\frac{12!}{3!4!5!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.1.2.3.4.1.2.3.4.5.} = 27720$$

verſchiedene Arten bewerkſtelliget werden.

Befinden ſich aber unter dieſen Kugeln 2 rothe, 3 gelbe, 3 grüne und 4 blaue, und ſollen von den drei Kugeln im erſten Fache ſtets eine roth und 2 blau; ferner von den 4 Kugeln im zweiten Fache eine roth, eine gelb, eine grün und eine blau; endlich von den 5 Kugeln im dritten Fache 2 gelb, 2 grün und eine blau ſeyn, ſo kann die Vertheilung der Kugeln auf

$$\frac{2!}{1!\,1!}\cdot\frac{3}{1!\,2!}\cdot\frac{3!}{1!\,2!}\cdot\frac{4!}{2!\,1!\,1!}=2.3.3.12.=216$$

verſchiedene Arten geſchehen.

## 39.

Man denke ſich nun n verſchiedene Elemente in beliebig viele Reihen abgetheilt, wovon die erſte a, die zweite b, die dritte c Elemente enthält u. ſ. w, indem $a+b+c+\ldots=n$ iſt. Dieſe n Elemente ſeyen in eine beſtimmte Anzahl von Parthien ſo zu vertheilen, daß in die erſte Parthie $\alpha$, in die zweite $\beta$, in die dritte $\gamma$ Elemente kommen u. ſ. w., wobei $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=n$ iſt, ſo kann dieß, in ſo fern man gar nichts darüber feſtſetzt, aus welchen Reihen die Elemente jeder Parthie herrühren ſollen, auf

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots}$$

Arten vorgenommen werden.

Betrachtet man die Art und Weiſe, wie die Glieder der obigen Reihen dabei in die einzelnen Parthien vertheilt werden, ſo findet man eine gewiſſe Menge von Complexionen, in welchen alle $\alpha$ Elemente der erſten Parthie aus der erſten Reihe genommen ſind; ferner ſolche Complexionen, in welchen $\alpha-1$ Elemente der erſten Parthie aus der erſten Reihe herrühren, und ein Element aus der zweiten oder dritten Reihe u. ſ. w. genommen iſt; dann ſolche Complexionen, in welchen $\alpha-2$ Elemente der erſten Parthie aus der erſten Reihe, und 2 Elemente aus der zweiten oder dritten Reihe entlehnt wurden, oder ein Element aus der zweiten, und eines aus der dritten u. ſ. w. Aehnliche Unterſcheidungen gelten gleichzeitig eben ſo von den übrigen Parthien in allen möglichen Combinationen der hier denkbaren Fälle — kurz man findet hier alle möglichen Vertheilungsweiſen der Elemente in die einzelnen Parthien, in Bezug auf die Verſchiedenheit der Reihen, aus welchen ſie her-

ſtammen, realiſirt. Berechnet man die Anzahl der Arten, auf welche jede dieſer Vertheilungsweiſen ausgeführt werden kann, und addirt alle dabei erhaltenen Reſultate, ſo hat man die Anzahl aller verſchiedenen Arten, auf welche ſich überhaupt n Elemente in die oben genannten Parthien ſo vertheilen laſſen, daß die erſte Parthie $\alpha$, die zweite $\beta$, die dritte $\gamma$ Elemente u. ſ. w. bekömmt. Es muß daher die Summe dieſer Reſultate

$$= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\text{ꝛc.}} \text{ ſeyn.}$$

Offenbar iſt aber jedes einzelne dieſer Reſultate die Anzahl der Arten, auf welche man die Elemente mehrerer Reihen, wovon die erſte a, die zweite b, die dritte c Elemente enthält, u. ſ. w. in die oben genannten Parthien ſo vertheilen kann, daß in die erſte Parthie $\alpha_1$ Elemente aus der erſten Reihe, $\beta_1$ aus der zweiten, $\gamma_1$ aus der dritten Reihe u. ſ. w. ferner in die zweite Parthie $\alpha_2$ Elemente aus der erſten Reihe, $\beta_2$ Elemente aus der zweiten, $\gamma_2$ aus der dritten Reihe u. ſ. w. dann in die dritte Parthie $\alpha_3$ Elemente aus der erſten Reihe, $\beta_3$ aus der zweiten, $\gamma_3$ aus der dritten Reihe u. ſ. w. geſetzt werden u. ſ. w., d. h. jedes einzelne dieſer Reſultate iſt ein Product von der Form

$$\frac{a}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\,\text{ꝛc.}} \cdot \frac{b!}{\beta_1!\,\beta_2!\,\beta_3!\,\text{ꝛc.}} \cdot \frac{c!}{\gamma_1!\,\gamma_2!\,\gamma_3!\,\text{ꝛc.}} \text{ ꝛc.}$$

wenn zwiſchen den Zahlen

$$\begin{array}{l} \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots \\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \ldots \\ \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \ldots \\ \text{u. ſ. w.} \end{array}$$

die Bedingungsgleichungen

$$\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = a \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots = b \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots = c \\ \text{u. ſ. w.} \end{array}$$

ferner $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \ldots = \alpha$
$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \ldots = \beta$
$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 + \ldots = \gamma$
u. ſ. w.

Statt finden, und dieſe Zahlen aller ganzen poſitiven dieſen Gleichungen entſprechenden Werthe, die Null mit eingerechnet, fähig ſind.

Addirt man daher alle Reſultate, welche aus dem oben angegebenen Ausdrucke

$$\frac{a!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\,\text{ꝛc.}} \cdot \frac{b!}{\beta_1!\,\beta_2!\,\beta_3!\,\text{ꝛc.}} \cdot \frac{c!}{\gamma_1!\,\gamma_2!\,\gamma_3!\,\text{ꝛc.}}\ \text{ꝛc.}$$

für alle ganzen poſitiven Auflöſungen jener Gleichungen hervorgehen, ſo iſt die Summe dieſer Reſultate nothwendig

$$= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\text{ꝛc.}}$$

$$= \frac{(a+b+c+\ldots)!}{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots)!(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2+\ldots)!(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3+\ldots)!\,\text{ꝛc.}}$$

Folgendes Beiſpiel mag die hier gemachten Schlüſſe erläutern:

Es ſeyen 9 Kugeln in 3 Fächer ſo zu vertheilen, daß in das erſte Fach 2 Kugeln, in das zweite 3, in das dritte Fach 4 Kugeln kommen, ſo kann dieß, nach 36, auf

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.1.2.3.1.2.3.4} = 1260$$

verſchiedene Arten geſchehen.

Man nehme nun an, unter obigen 9 Kugeln befinden ſich 3 weiße und 6 ſchwarze, ſo ſind folgende Fälle möglich:

Es kommen

| in das erste Fach | in das zweite Fach | in das dritte Fach | zufolge 38, auf |
|---|---|---|---|
| 2 weiße Kugeln | 1 weiße 2 schwarze | 4 schwarze | $\frac{1.2.3}{1.2.1} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3.4} = 45$ |
| 2 weiße | 3 schwarze | 1 weiße 3 schwarze | $\frac{1.2.3}{1.2.1} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3} = 60$ |
| 1 weiße 1 schwarze | 2 weiße 1 schwarze | 4 schwarze | $\frac{1.2.3}{1.1.2} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.1.1.2.3.4} = 90$ |
| 1 weiße 1 schwarze | 1 weiße 2 schwarze | 1 weiße 3 schwarze | $\frac{1.2.3}{1.1.1} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.1.2.1.2.3} = 360$ |
| 1 weiße 1 schwarze | 3 schwarze | 2 weiße 2 schwarze | $\frac{1.2.3}{1.1.2} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.1.2.3.1.2} = 180$ |
| 2 schwarze | 3 weiße | 4 schwarze | $\frac{1.2.3}{1.2.3} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3.4} = 15$ |
| 2 schwarze | 2 weiße 1 schwarze | 1 weiße 3 schwarze | $\frac{1.2.3}{1.2.1} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.1.2.3} = 180$ |
| 2 schwarze | 1 weiße 2 schwarze | 2 weiße 2 schwarze | $\frac{1.2.3}{1.1.2} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.1.2} = 270$ |
| 2 schwarze | 3 schwarze | 3 weiße 1 schwarze | $\frac{1.2.3}{1.2.3} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3.1} = 60$ |
| | | | Arten |

und hier ist, wie es die Natur der Sache fordert,

$45 + 60 + 90 + 360 + 180 + 15 + 180 + 270 + 60 = 1260.$

Vergleicht man die in der obigen allgemeinen Betrachtung vorkommenden Größen mit den numerischen Daten dieses Beispiels, so zeigt sich:

$$n=9,\ \alpha=2,\ \beta=3,\ \gamma=4,\ a=3,\ b=6$$

$$\begin{array}{l|l} \alpha_1+\beta_1=2 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3 \\ \alpha_2+\beta_2=3 & \beta_1+\beta_2+\beta_3=6 \\ \alpha_3+\beta_3=4 & \end{array}$$

und es ist die Summe der Resultate, welche aus dem Producte

$$\frac{1.\ 2.\ 3}{1\ldots\alpha_1 . 1\ldots\alpha_2 . 1\ldots\alpha_3} \cdot \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}{1\ldots\beta_1 . 1\ldots\beta_2 . 1\ldots\beta_3} =$$

$$= \frac{3!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!} \cdot \frac{6!}{\beta_1!\,\beta_2!\,\beta_3!}$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ die an obige Bedingungen gebundenen Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots$ erhalten, unter allen möglichen Gruppirungen dieser Werthe hervorgehen

$$= \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.1.2.3.\ 1.2.3.4} = \frac{9!}{2!\,3!\,4!} = 1260.$$

Setzt man $n=\alpha+\beta=a+b$

$$\begin{array}{l|l} \alpha_1+\beta_1=\alpha & \alpha_1+\alpha_2=a \\ \alpha_2+\beta_2=\beta & \beta_1+\beta_2=b \end{array}$$

so muß die Summe der Resultate, welche das Product

$$\frac{a!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \cdot \frac{b!}{\beta_1!\,\beta_2!}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{für } \alpha_1=0, 1, 2, 3 \ldots & \alpha_2=0, 1, 2, 3 \ldots \\ \beta_1=0, 1, 2, 3 \ldots & \beta_2=0, 1, 2, 3 \ldots, \end{array}$$

unter obigen Bedingungen darbietet,

$$= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} \text{ seyn.}$$

Nun ist wegen

$$\alpha_2=a-\alpha_1,\ \beta_2=b-\beta_1,\ \beta_1=\alpha-\alpha_1$$

den in 36 gebrauchten Transformationen gemäß

$$\frac{a!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} = \binom{a}{\alpha_1},\ \frac{b!}{\beta_1!\,\beta_2!} = \binom{b}{\alpha-\alpha_1}$$

ferner eben so, wegen $\beta=n-\alpha$

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!} = \binom{n}{\alpha}$$

Daher ist die Summe der aus der Form $\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\alpha-\alpha_1}$ für $\alpha_1 = 0, 1, 2, 3 \ldots \alpha$ entspringenden Größen

$$= \binom{n}{\alpha} = \binom{a+b}{\alpha}.$$

Hier muß man aber, wenn $\binom{a}{\alpha_1}$ oder $\binom{b}{\alpha-\alpha_1}$ in $\binom{a}{0}$ oder in $\binom{b}{0}$ übergeht, dafür die Einheit setzen, da diese Symbole, wenn man auf ihren Ursprung aus den Größen $\frac{a!}{\alpha_1!\,\alpha_2!}$, $\frac{b!}{\beta_1!\,\beta_2!}$ mit Rücksicht auf die in 13 gemachte Bemerkung zurückgeht, den speciellen Werthen $\frac{a!}{a!}$, $\frac{b!}{b!}$ entsprechen.

Es ist demnach:

$$\binom{b}{\alpha} + \binom{a}{1}\binom{b}{\alpha-1} + \binom{a}{2}\binom{b}{\alpha-2} + \binom{a}{3}\binom{b}{\alpha-3}$$
$$+ \ldots\ldots + \binom{a}{\alpha-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{\alpha} = \binom{a+b}{\alpha}.$$

## Das Combiniren zu bestimmten Summen.

### 40.

Bei der combinatorischen Behandlung arithmetischer Probleme verlangt man oft nur jene Combinationen ohne Wiederholungen oder mit uneingeschränkten Wiederholungen, in welchen die Zeiger der Elemente vorgeschriebenen Bedingungen Genüge leisten. Der einfachste, am häufigsten vorkommende und überdieß eine leichte Auflösung verstattende Fall ist der, wobei es sich um solche Combinationen mit uneingeschränkten Wiederholungen handelt, in welchen die Zeiger

der Elemente zusammenaddirt eine bestimmte Summe geben. Das Verfahren, durch welches diese Combinationen für sich allein dargestellt werden, heißt das Combiniren zu bestimmten Summen.

Man fordert entweder alle möglichen Combinationsformen zu einer vorgeschriebenen Summe, oder nur eine einzelne Klasse derselben. In jedem dieser Fälle wollen wir annehmen, es seyen so viele Elemente gegeben, als dabei, ohne die festgesetzte Summe zu überschreiten, nur immer in Anspruch genommen werden können. Nach vollbrachter Operation müssen natürlich die Complexionen, welche sich auf höhere Elemente beziehen, als wirklich vorhanden sind, weggelassen werden. Ferner wollen wir hier den Gebrauch des Zeigers o ausschließen, weil derselbe auf die Zeigersumme einer Complexion keinen Einfluß hat, und daher, sobald man sich an keine bestimmte Klasse bindet, wegen seiner unbeschränkten Wiederholbarkeit stets eine unendliche Menge von Complexionen herbeiführt.

41.

Wenn man sich alle möglichen Combinationsformen zu einer bestimmten Summe wohlgeordnet vorstellt, so zeigt sich jene Complexion als die niedrigste, in welcher bloß das erste Element so oft vorkommt, als die vorgeschriebene Summe Einheiten enthält. Zu jeder einzelnen Complexion wird ferner die nächsthöhere gefunden, wenn man das in der vorletzten Stelle befindliche Element, welches hier immer das späteste, ohne Störung der Zeigersumme erhöhungsfähige ist, um so wenig als möglich erhöht, und demselben so niedrige Elemente nachfolgen läßt, als es die natürliche Ordnung der Zeiger und ihre vorgeschriebene Summe gestattet. Damit nun die Zeiger der neuen in die Complexion eingeführten Elemente einerseits eben die Summe ausmachen, als die beiden frühern Endelemente, andererseits aber so niedrig als möglich ausfallen, so theile man den um die Einheit verminderten Zeiger des letzten Ele-

mentes der umzuſtaltenden Complexion, durch den um eins vermehrten Zeiger des vorletzten; ſetze ſtatt der zwei Endelemente, das durch den Diviſor angezeigte Element ſo oft, als der Quotient Einheiten enthält, und laſſe hierauf noch ein Element folgen, deſſen Zeiger der Summe des Diviſors und des Reſtes gleichkommt.

Endigt ſich alſo die Complexion mit zwei Elementen, deren Zeiger um weniger als zwei Einheiten von einander abweichen, ſo vertauſche man dieſe Elemente gegen ein einziges, deſſen Zeiger die Summe der Zeiger der beiden andern iſt.

So iſt z. B. bei dem Combiniren zur Summe 19 die nächſthöhere Complexion für $11\overline{215}$, wegen

$$\frac{15-1}{2+1} = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3} \text{ offenbar } 1133335;$$

für 1189 iſt die nächſthöhere Complexion $1117\overline{\ }$, weil

$$\frac{9-1}{8+1} = \frac{8}{9} = 0 + \frac{8}{9};$$

für $1117\overline{\ }$ iſt ſie 1222222222, weil

$$\frac{17-1}{1+1} = \frac{16}{2} = 8 + 0.$$

Auf dieſe Art kann man von den niedrigern Complexionen ſtufenweiſe zu den höhern aufſteigen, bis man endlich auf eine Complexion kömmt, die bloß ein Element, deſſen Zeiger der vorgeſchriebenen Summe gleich iſt, enthält. Dieſe läßt ſich ohne Störung der Zeigerſumme nicht mehr erhöhen, und macht daher den Beſchluß der Operation.

## Beiſpiele.

I. Combinationsformen zur Summe 6.

1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 2
1 1 1 3
1 1 2 2
1 1 4
1 2 3
1 5
2 2 2
2 4
3 3
6

II. Combinationsformen zur Summe 8.

1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 2
1 1 1 1 1 3
1 1 1 1 2 2
1 1 1 1 4
1 1 1 2 3
1 1 1 5
1 1 2 2 2
1 1 2 4
1 1 3 3
1 1 6
1 2 2 3
1 2 5
1 3 4
1 7
2 2 2 2
2 2 4
2 3 3
2 6
3 5
4 4
8

42.

Schreibt man, wie es in den beiden vorhergehenden Beiſpielen geſchehen iſt, alle Combinationen zu einer beſtimmten Summe gut geordnet unter einander, indem man die Anfangselemente in eine verticale Columne bringt, und führt dann, bei einer beliebigen Zwiſchenſtelle der erſten Complexion anfangend, einen verticalen Strich abwärts, welchen man, ſobald die links vor ihm ſtehenden Elemente ſich zu ändern anfangen, gegen die

Rechte hin horizontal auslaufen läßt'; so trennt der hiedurch gebildete Winkelhaken, von der gesammten Menge der Complexionen, ein vollständiges System von Combinationen zu einer niedrigern Summe. So sondert in dem folgenden Beispiele der Winkelhaken von den Combinationen zur Summe 8 alle Combinationen zur Summe 6 ab.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | | | |
| 1 | 1 | 1 | 5 | | | | |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | | | |
| 1 | 1 | 2 | 4 | | | | |
| 1 | 1 | 3 | 3 | | | | |
| 1 | 1 | 6 | | | | | |
| 1 | 2 | 2 | 3 | | | | |
| 1 | 2 | 5 | | | | | |
| 1 | 3 | 4 | | | | | |
| 1 | 7 | | | | | | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | | | | |
| 2 | 2 | 4 | | | | | |
| 2 | 3 | 3 | | | | | |
| 2 | 6 | | | | | | |
| 3 | 5 | | | | | | |
| 4 | 4 | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |

Man vergleiche hiemit 41, Beispiel I. und II.

Es liegt nämlich in dem Wesen des Combinirens zu bestimmten Summen, daß die Complexionen, deren erste Stellen gleich besetzt sind, in den folgenden Stellen einerlei Zeiger-

ſumme und zugleich alle hiebei möglichen Fälle darbieten. Jede ſolche Anordnung von Combinationen zu einer beſtimmten Summe, ſchließt alſo zugleich alle Syſteme der Combinationen zu den niedrigern Summen ein, oder ſie iſt, wie man ſich nach Hindenburg auszudrücken pflegt, eine Involution derſelben.

43.

Es bringt ſich nun die Forderung auf, aus dem Inbegriffe aller unter einander geſchriebener Combinationen zu einer feſtgeſetzten Summe, durch Anſetzen neuer Elemente, das Syſtem der Combinationen zur nächſthöhern Summe zu erzeugen. Dieß geſchieht, wenn man allen Complexionen zur niedrigern Summe das erſte Element vorſetzt, wodurch man alle mit dem erſten Elemente anfangenden Combinationsformen zur nächſthöhern Summe erhält; ferner, wenn man in allen Complexionen zur niedrigern Summe, deren zwei erſte Elemente verſchieden ſind, das Anfangselement mit dem nächſthöhern vertauſcht, wodurch ſich alle mit höhern Anfangselementen verſehenen Combinationsformen zur nächſthöhern Summe ergeben. Man hat ſomit genau ſämmtliche Combinationsformen zur nächſthöhern Summe. Denn ließe ſich eine unter denſelben nicht vorfindige oder daſelbſt wiederholt vorkommende Form angeben, ſo könnte man ſie, wenn ſie mit dem erſten Elemente beginnt, durch Weglaſſen desſelben, und wenn ſie ein höheres Element an der Spitze trägt, durch Erniedrigen desſelben, in eine Combination zur nächſtniedrigern Summe umſtalten. Dieſe würde alſo im erſten Falle unter den bereits vorhandenen Complexionen zur nächſtniedrigern Summe nicht vorkommen, weil ſie ſonſt, nach dem erklärten Verfahren, eben jene fehlende Combinationsform zur nächſthöhern Summe erzeugt hätte, und im zweiten Falle eben ſo oft wiederholt da ſtehen, weil jene wiederholte Combinationsform nur aus ihr entſpringen konnte. Es wäre alſo der gegebene Inbegriff der Combinationen

zur niedrigern Summe unvollständig oder überzählig, gegen die Vorausſetzung.

Da ſich für die Summe 1 bloß das erſte Element allein anſetzen läßt, ſo kann man nun hieraus alle Combinationen zu den höhern Summen ſtufenweiſe ableiten, bis man die Summe, welche man eben verlangt, erzeugt hat; eine Methode, die der in 41 angegebenen, in Hinſicht auf die Leichtigkeit der Ausführung, vorzuziehen ſeyn dürfte.

Die Bildung der Combinationen zu den aufeinanderfolgenden Summen, von der Summe 1 angefangen, wird, dem Geſagten gemäß, in folgendem Schema erſichtlich;

u. ſ. w.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | | | |
| 1 | 1 | 1 | 5 | | | | |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | | | |
| 1 | 1 | 2 | 4 | | | | |
| 1 | 1 | 3 | 3 | | | | |
| 1 | 1 | 6 | | | | | |
| 1 | 2 | 2 | 3 | | | | |
| 1 | 2 | 5 | | | | | |
| 1 | 3 | 4 | | | | | |
| 1 | 7 | | | | | | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | | | | |
| 2 | 2 | 4 | | | | | |
| 2 | 3 | 3 | | | | | |
| 2 | 6 | | | | | | |
| 3 | 5 | | | | | | |
| 4 | 4 | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |

44.

Verlangt man bloß eine bestimmte Klasse der Combinationen zu einer gegebenen Summe, so erhält man die niedrigste Complexion, indem man das erste Element um einmal weniger setzt, als der Klassenexponent Einheiten hat, und dann ein Element folgen läßt, dessen Zeiger der Differenz zwischen der gegebenen Summe und der bereits vorhandenen Zeigersumme gleichkommt. Um ferner aus jeder einzelnen Complexion die nächsthöhere abzuleiten, suche man das späteste Element auf, dem ein um zwei oder mehrere Stufen höheres, in was immer für einem Abstande folgt; vertausche das erstere mit dem nächsthöhern Elemente und setze dieses auch in die folgenden Stellen, die letzte ausgenommen, in welche das Element kommen muß, dessen Zeiger die bereits vorhandene Zeigersumme zur vorgeschriebenen ergänzt. Bei der Bestimmung dieser Ergänzung ist die Bemerkung nützlich, daß in Complexionen, deren anfängliche Elemente übereinstimmen, die Zeiger der folgenden einerlei Summe geben. Die Operation ist beendigt, sobald man auf eine Complexion kommt, in welcher der Unterschied zwischen den Zeigern der Elemente weniger als zwei Einheiten beträgt. Denn die Erhöhung eines Elementes fordert, der festgesetzten Zeigersumme wegen, die Erniedrigung eines andern, daher kann diese Complexion ohne Verletzung der natürlichen Ordnung ihrer Elemente nicht erhöht werden.

## Beiſpiele.

Vierte Combinationsklaſſe zur Summe 12.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 9 |
| 1 | 1 | 2 | 8 |
| 1 | 1 | 3 | 7 |
| 1 | 1 | 4 | 6 |
| 1 | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 2 | 2 | 7 |
| 1 | 2 | 3 | 6 |
| 1 | 2 | 4 | 5 |
| 1 | 3 | 3 | 5 |
| 1 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 6 |
| 2 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 2 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

Sechste Combinationsklaſſe zur Summe 12.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 6 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Anmerkung. Sind die Zeiger der zur Summe s und zur Klaſſe k zu combinirenden Elemente die Zahlen 0, 1, 2, 3..., ſo bilde man, wenn man es bequemer findet, alle Combinationen der Zeiger 1, 2, 3 . . . zur Summe s, von der erſten Klaſſe angefangen, bis zur kten, und ſetze den Complexionen, in welchen weniger als k Elemente erſcheinen, ſo viele Nullen vor, als erforderlich ſind, um dieſe Complexionen zur kten Klaſſe zu erheben.

### 45.

Man kann zu beſtimmten Summen auch ohne Wiederholung irgend eines Elementes combiniren. Da wir aber im Folgenden von dieſer Operation gar keinen Gebrauch machen werden, ſo übergehen wir die hiezu dienlichen Vorſchriften, um ſo mehr, da die Combinationen ohne Wiederholungen immer in

den Combinationen mit Wiederholungen enthalten ſind, und aus denſelben leicht herausgehoben werden können.

46.

Man hat keine allgemeine Formel zur Berechnung der Anzahl der Combinationen zu beſtimmten Summen. Kennt man jedoch für eine einzelne Combinationsklaſſe die Anzahl der Complexionen zu jeder der aufeinanderfolgenden Summen, ſo läßt ſich hieraus die Anzahl dieſer Complexionen für alle vorhergehenden und folgenden Klaſſen nach und nach leicht finden, wodurch man in den Stand geſetzt iſt, hierüber eine Tabelle zu verfertigen.

Sondert man nämlich von allen Combinationen der kten Klaſſe zur Summe s, die mit dem erſten Elemente anfangen, dieſes Element ab, ſo bleiben alle Combinationen der (k—1)ten Klaſſe zur Summe s—1 zurück; vermindert man ferner in allen Complexionen der kten Klaſſe zur Summe s, die ein höheres Anfangselement haben, den Zeiger jedes Elementes um die Einheit, ſo erhält man ſämmtliche Combinationen der kten Klaſſe zur Summe s—k.

Daß in beiden Fällen die Gattung der entſtehenden Combinationsformen richtig angegeben wurde, iſt für ſich klar; daß keine Form fehlt, oder wiederholt vorkommt, kann durch eine einfache, auf die Natur des Combinirens zu beſtimmten Summen gegründete Betrachtung, auf ähnliche Art, wie dieß in 43 geſchehen iſt, gezeigt werden. Man könnte nämlich aus jeder fehlenden oder mehrfach erhaltenen Form, durch Zuſetzen des früher Weggenommenen, eine Form der kten Klaſſe zur Summe s erzeugen, welche dort ebenfalls fehlen, oder wiederholt erſcheinen müßte, weil ſie ſonſt, dem obigen Verfahren gemäß, die fehlende Form erzeugt hätte, oder die wiederholte nicht hätte erzeugen können, was der Vorausſetzung widerſpricht.

So ist z. B.

| | | |
|---|---|---|
| 111112 | 12229 | 22228 |
| 111211 | 12238 | 22237 |
| 111310 | 12247 | 22246 |
| 11149 | 12256 | 22255 |
| 11158 | 12337 | 22336 |
| 11167 | 12346 | 22345 |
| 112210 | 12355 | 22444 |
| 11239 | 12445 | 23335 |
| 11248 | 13336 | 23344 |
| 11257 | 13345 | 33334 |
| 11266 | 13444 | |
| 11338 | | |
| 11347 | | |
| 11356 | | |
| 11446 | | |
| 11455 | | |

der Inbegriff aller Combinationen der fünften Klasse zur Summe 16. Die zwei ersten Vertical-Columnen enthalten alle mit dem ersten Elemente anfangenden Complexionen. Man erhält aus denselben durch Absonderung dieses Elementes:

| | |
|---|---|
| 11112 | 2229 |
| 11211 | 2238 |
| 11310 | 2247 |
| 1149 | 2256 |
| 1158 | 2337 |
| 1167 | 2346 |
| 12210 | 2355 |
| 1239 | 2445 |
| 1248 | 3336 |
| 1257 | 3345 |
| 1266 | 3444 |
| 1338 | |
| 1347 | |
| 1356 | |
| 1446 | |
| 1455 | |

und dieß ſind alle Combinationen der vierten Klaſſe zur Summe 15.

Die dritte Vertical-Columne, welche alle jene Combinationen der fünften Claſſe zur Summe 16 umfaßt, die ein höheres Element an der Spitze führen, gibt, nach Verminderung jedes Zeigers um die Einheit:

1 1 1 1 7
1 1 1 2 6
1 1 1 3 5
1 1 1 4 4
1 1 2 2 5
1 1 2 3 4
1 1 3 3 3
1 2 2 2 4
1 2 2 3 3
2 2 2 2 3

d. h. alle Combinationen der fünften Klaſſe zur Summe

$$16 - 5 = 11.$$

Bezeichnet man nun allgemein die Anzahl der zur kten Klaſſe gehörigen Combinationen für die Summe s durch das Symbol $C_k^s$, ſo hat man die Gleichung:

$$C_k^s = C_{k-1}^{s-1} + C_k^{s-k}$$

aus welcher, weil, ſo lange $s - k < k$ oder $s < 2k$ iſt, $C_k^{s-k} = 0$ ſeyn muß, die Werthe von $C_k^s$

für $s = k,\ k+1,\ k+2,\ k+3, \ldots$ ꝛc.

gefunden werden können, ſobald man alle Werthe von $C_{k-1}^{s-1}$ kennt.

Umgekehrt kann man wegen

$$C_{k-1}^{s-1} = C_k^s - C_k^{s-k}$$

die Werthe von $C_{k-1}^{s-1}$ finden, ſobald die von $C_k^s$ gegeben ſind.

Der Anfang einer nach obiger Gleichung berechneten Tabelle für $C_k^s$ mag hier als Beispiel dienen:

| s= | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k=1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 | 11 | 15 | 18 | 23 | 27 | 34 | 39 | 47 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 18 | 23 | 30 | 37 | 47 | 57 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 14 | 20 | 26 | 35 | 44 | 58 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 21 | 28 | 38 | 49 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 29 | 40 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 |

47.

Die vorhergehende Tabelle kann auch gebraucht werden, um die Anzahl der Combinationsformen zu bestimmen, welche sämmtliche Klassen zu einer gegebenen Summe darbieten. Vermindert man nämlich in den Combinationsformen der kten Klasse zur Summe s den Zeiger eines jeden Elementes um die Einheit, so erhält man, wie leicht einzusehen ist, alle Combi-

nationen zur Summe $s - k$, von der ersten Klasse angefangen bis zur kten, nach den Klassen gut geordnet.

So geben z. B. die in 46 angeführten Combinationen der fünften Klasse zur Summe 16, nach vollbrachter Verringerung jedes Zeigers um 1

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 1113 | 11117 |
| 110 | 1127 | 11126 |
| 29 | 1136 | 11135 |
| 38 | 1145 | 11144 |
| 47 | 1226 | 11225 |
| 56 | 1235 | 11234 |
| 119 | 1244 | 11333 |
| 128 | 1334 | 12224 |
| 137 | 2225 | 12233 |
| 146 | 2234 | 22223 |
| 155 | 2333 | |
| 227 | | |
| 236 | | |
| 245 | | |
| 335 | | |
| 344 | | |

nämlich die aufeinanderfolgenden gutgeordneten Combinationsklassen zur Summe $16 - 5 = 11$, von der ersten Klasse angefangen bis zur fünften.

Es ist also, wenn man im Vorhergehenden $s+k$ statt $s$ gesetzt denkt, $C_k^{s+k}$ der Ausdruck für die Anzahl der Formen, welche in den ersten k Combinationsklassen zur Summe s enthalten sind. Nimmt man $k = s$, oder auch $k > s$, so hat man die Anzahl aller möglichen Combinationen zur Summe s, welche demnach für jeden ganzen positiven Werth von r durch $C_{s+r}^{2s+r}$ vorgestellt wird.

## Das Variiren.

48.

Bei dem Variiren wird gefordert, aus jeder von mehreren abgesonderten Elementenreihen, so oft es angeht, ein Element, aber jedesmal nur eines, herauszunehmen und zur Bildung einer Complexion zu verwenden. Jede einzelne Complexion, die hier offenbar so viel Elemente enthält, als es Reihen gibt, heißt eine Variationsform, oder auch eine Variation.

49.

Man erhält daher alle Variationen gegebener Elementenreihen, wenn man jedes Element der ersten Reihe mit jedem Elemente der zweiten verbindet; dann zu jeder Vereinigung der Elemente der ersten zwei Reihen, jedes Element der dritten Reihe hinzufügt, und so fort, mit jeder aus den Elementen vorhergehender Reihen bereits gebildeten Complexion, jedes Element der nächsten Reihe combinirt. Die Anzahl der hiebei entstehenden Complexionen ist das Product der Elementenmengen der einzelnen Reihen. Die ganze Operation ist für sich klar und bedarf daher keiner weitern Erläuterung.

Beispiel. Für die Reihen

A, B, C, D
a, b, c, d
$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$

findet man folgende Variationsformen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A a $\alpha$ | A a $\beta$ | A a $\gamma$ | A a $\delta$ |
| B a $\alpha$ | B a $\beta$ | B a $\gamma$ | B a $\delta$ |
| C a $\alpha$ | C a $\beta$ | C a $\gamma$ | C a $\delta$ |
| D a $\alpha$ | D a $\beta$ | D a $\gamma$ | D a $\delta$ |
| A b $\alpha$ | A b $\beta$ | A b $\gamma$ | A b $\delta$ |
| B b $\alpha$ | B b $\beta$ | B b $\gamma$ | B b $\delta$ |
| C b $\alpha$ | C b $\beta$ | C b $\gamma$ | C b $\delta$ |
| D b $\alpha$ | D b $\beta$ | D b $\gamma$ | D b $\delta$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| A c α | A c β | A c γ | A c δ |
| B c α | B c β | B c γ | B c δ |
| C c α | C c β | C c γ | C c δ |
| D c α | D c β | D c γ | D c δ |
| A d α | A d β | A d γ | A d δ |
| B d α | B d β | B d γ | B d δ |
| C d α | C d β | C d γ | C d δ |
| D d α | D d β | D d γ | D d δ |

50.

Stellt man die Elemente jeder Reihe in eine beliebige Ordnung, so kann man alle ersten, zweiten, dritten . . . Elemente gemeinschaftlich durch die Zeiger 1, 2, 3 . . . andeuten, wenn man nur, um Verwechslungen vorzubeugen, in die erste Stelle jeder Complexion bloß Elemente aus der ersten Reihe, in die zweite Stelle bloß Elemente aus der zweiten Reihe setzt u. s. w., was verstattet ist, da die in der Erklärung des Variirens ausgesprochene Forderung, die Ordnung der Elemente jeder einzelnen Complexion ohnehin unberührt läßt. Man kann dabei immer annehmen, daß alle Reihen gleich viel Elemente enthalten. Ist dieß nicht der Fall, so läßt man wieder diejenigen Complexionen weg, zu welchen aus einer Reihe Elemente genommen werden sollen, die daselbst nicht wirklich vorhanden sind.

Dieses vorausgesetzt, erhält man ebenfalls alle Variationen gegebener Elementenreihen, wenn man alle denkbaren Zusammenstellungen der Elemente hinsichtlich der Grade ihrer Zeiger bildet und dann eine Complexion, so oft es angeht, dadurch abändert, daß man zwar die nämlichen Zeiger beibehält, allein dieselben immer Elemente anderer Reihen bedeuten läßt; oder kürzer: wenn man die verschiedenen Zeiger anfänglich so behandelt, als gehörten sie sämmtlich einer Reihe an; aus denselben alle möglichen Combinationen mit Wiederholungen zu einer Klasse, deren Exponent der Anzahl der Reihen gleich ist, nebst

allen möglichen Permutationsformen dieſer Combinationen bildet, und dann alle in der erſten, zweiten, dritten . . . Stelle befindlichen Zeiger durch die entſprechenden Elemente der erſten, zweiten, dritten . . . Reihe erſetzt.

Sind die gegebenen Elementenreihen identiſch, d. h. beſteht jede derſelben aus den nämlichen Elementen, ſo geht das Variiren offenbar in ein Combiniren der Elemente einer dieſer Reihen mit Wiederholungen, zu einer Klaſſe, deren Exponent der Anzahl der Reihen gleich iſt, und in ein gleichzeitiges Permutiren der erhaltenen Combinationsformen über.

Daß ſich die hier erklärte Methode des Variirens auch auf den Fall erſtreckt, wenn dieſe Operation nur hinſichtlich einer beſtimmten Summe der Zeiger der Elemente vorzunehmen iſt, bedarf keines Beweiſes. Man wird dann derſelben das Combiniren zu beſtimmten Summen zum Grunde legen.

# Zweites Kapitel.

## Erklärung einiger arithmetisch-combinatorischer Zeichen.

### 51.

Bei allen combinatorischen Operationen, welche im Folgenden vorzunehmen sind, wollen wir voraussetzen, daß die statt der Zeiger als Elemente gesetzten Größen, in jeder einzelnen Complexion mit einander multiplicirt, und die Complexionen selbst zu einander addirt werden. Sollten wir unter einer andern Voraussetzung combiniren, so werden wir es ausdrücklich erinnern.

Die Summe der auf diese Art erhaltenen Complexionen wollen wir, wenn es Combinationen ohne Wiederholungen sind, durch C; wenn es Combinationen mit Wiederholungen sind, durch Cw; endlich, wenn es Variationen sind, durch V andeuten, indem wir diese Buchstaben den neben einander geschriebenen, durch Beistriche getrennten, und in Klammern eingeschlossenen Elementen vorsetzen. Nur dann, wenn eine Rechnung sich ununterbrochen fort auf die nämlichen Elemente bezieht, soll es, der Kürze wegen, verstattet seyn, dieselben bloß einmal anzugeben, und sie dann hinter den genannten Operationszeichen wegzulassen.

Bei den Zeichen C und Cw werden wir die Combinationsklasse durch den rechts unterhalb hinzugeschriebenen Kla-

derholungszeiger eines Elementes anzusehen sind, was in jedem besondern Falle leicht zu erkennen ist.

So ist z. B:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{C}w_3^6(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{1.2.3}{1.2} a_1^2 a_4 + 1.2.3 a_1 a_2 a_3 + a_2^3$$

$$= 3 a_1^2 a_4 + 6 a_1 a_2 a_3 + a_2^3$$

$$\mathfrak{p}\mathfrak{C}w^6(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1^6 + \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4} a_1^4 a_2 + \frac{1.2.3.4}{1.2.3} a_1^3 a_3$$

$$+ \frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} a_1^2 a_2^2 + \frac{1.2.3}{1.2} a_1^2 a_4 + 1.2.3 a_1 a_2 a_3$$

$$+ a_2^3 + 1.2 a_2 a_4 + a_3^2$$

$$= a_1^6 + 5 a_1^4 a_2 + 4 a_1^3 a_3 + 6 a_1^2 a_2^2 + 3 a_1^2 a_4$$

$$+ 6 a_1 a_2 a_3 + a_2^3 + 2 a_2 a_4 + a_3^2$$

Man hat also für n Reihen, deren jede aus den Elementen $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ ꝛc. besteht, die Gleichung:

$$\mathfrak{V}\left\{\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots \\ a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots \\ a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots \\ \text{ꝛc.} \end{matrix}\right\} = \mathfrak{p}\mathfrak{C}w_n(a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots)$$

[illegible] oben von den Variationen einer gewissen Anzahl [illegible] Elementenreihen überhaupt gesagt wurde, gilt offen[illegible] den Fall, wenn bloß Variationen zu einer bestimm[illegible] [illegible] zu n[illegible] [illegible]che dann [illegible] mit ihren [illegible] Wieder[illegible] [illegible]lasse,

$$\mathfrak{V}^s\begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots, \\ a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots \\ a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots \end{Bmatrix} = p\mathfrak{C}w_n^s(a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots)$$

u. ſ. w.

## 53.

Aus den in 33 angeſtellten Betrachtungen erhellet, daß man die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen für n Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ zur kten Klaſſe, kmal bekommt, wenn man die Complexionen, in welchen das erſte Element erſcheint, dann jene, in welchen das zweite, ferner jene, in welchen das dritte Element enthalten iſt u. ſ. w., bis auf jene, in welchen das letzte Element ſich befindet, abgeſondert darſtellt, und alle dieſe Complexionen zuſammen addirt. Der arithmetiſchen Verbindung gemäß, in welcher wir hier Elemente und Complexionen betrachten, iſt die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen zur Klaſſe k, in welchen ein beſtimmtes Element vorkommt, das Product aus dieſem Elemente und aus der Summe der Combinationen der übrigen Elemente zur Klaſſe $k-1$; bezeichnen wir nun den Reſt, welcher zurückbleibt, wenn man von einer Summe von Complexionen diejenigen abgeſondert denkt, die ein beſtimmtes Element enthalten, dadurch, daß wir dieſes Element, in Klammern eingeſchloſſen, unter das ſich auf alle Elemente beziehende Operationszeichen ſetzen, ſo können wir obigen Satz durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$a_1 \cdot \mathfrak{C}_{k-1}(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) + a_2 \cdot \mathfrak{C}_{k-1}(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)$$
$$(a_1) \qquad\qquad (a_2)$$
$$\mathfrak{C}_{k-1}(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) + \ldots\ldots + a_n \cdot \mathfrak{C}_{k-1}(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)$$
$$(a_3) \qquad\qquad (a_n)$$
$$= k \cdot \mathfrak{C}_k(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)$$

Der Anfang einer nach obiger Gleichung berechneten Tabelle für $C_k^s$ mag hier als Beiſpiel dienen:

| s= | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k=1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 | 11 | 15 | 18 | 23 | 27 | 34 | 39 | 47 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 18 | 23 | 30 | 37 | 47 | 57 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 14 | 20 | 26 | 35 | 44 | 58 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 21 | 28 | 38 | 49 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 29 | 40 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 |

47.

Die vorhergehende Tabelle kann auch gebraucht werden, um die Anzahl der Combinationsformen zu beſtimmen, welche ſämmtliche Klaſſen zu einer gegebenen Summe darbieten. Vermindert man nämlich in den Combinationsformen der kten Klaſſe zur Summe s den Zeiger eines jeden Elementes um die Einheit, ſo erhält man, wie leicht einzuſehen iſt, alle Combi-

nationen zur Summe $s - k$, von der ersten Klasse angefangen bis zur kten, nach den Klassen gut geordnet.

So geben z. B. die in 46 angeführten Combinationen der fünften Klasse zur Summe 16, nach vollbrachter Verringerung jedes Zeigers um 1

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 1113 | 11117 |
| 110 | 1127 | 11126 |
| 29 | 1136 | 11135 |
| 38 | 1145 | 11144 |
| 47 | 1226 | 11225 |
| 56 | 1235 | 11234 |
| 119 | 1244 | 11333 |
| 128 | 1334 | 12224 |
| 137 | 2225 | 12233 |
| 146 | 2234 | 22223 |
| 155 | 2333 | |
| 227 | | |
| 236 | | |
| 245 | | |
| 335 | | |
| 344 | | |

nämlich die aufeinanderfolgenden gutgeordneten Combinationsklassen zur Summe $16 - 5 = 11$, von der ersten Klasse angefangen bis zur fünften.

Es ist also, wenn man im Vorhergehenden $s+k$ statt $s$ gesetzt denkt, $C_k^{s+k}$ der Ausdruck für die Anzahl der Formen, welche in den ersten k Combinationsklassen zur Summe s enthalten sind. Nimmt man $k = s$, oder auch $k > s$, so hat man die Anzahl aller möglichen Combinationen zur Summe s, welche demnach für jeden ganzen positiven Werth von r durch $C_{s+r}^{2s+r}$ vorgestellt wird.

Der Anfang einer nach obiger Gleichung berechneten Tabelle für $C_k^s$ mag hier als Beiſpiel dienen:

| s= | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k=1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 | 11 | 15 | 18 | 23 | 27 | 34 | 39 | 47 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 18 | 23 | 30 | 37 | 47 | 57 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 14 | 20 | 26 | 35 | 44 | 58 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 21 | 28 | 38 | 49 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 29 | 40 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 |

47.

Die vorhergehende Tabelle kann auch gebraucht werden, um die Anzahl der Combinationsformen zu beſtimmen, welche ſämmtliche Klaſſen zu einer gegebenen Summe darbieten. Vermindert man nämlich in den Combinationsformen der kten Klaſſe zur Summe s den Zeiger eines jeden Elementes um die Einheit, ſo erhält man, wie leicht einzuſehen iſt, alle Combi-

nationen zur Summe $s-k$, von der [illegible]
bis zur $k$ten, nach den Klassen gut geordnet.

So geben z. B. die in 46 angeführten [illegible]
der fünften Klasse zur Summe 16, [illegible]
gerung jedes Zeigers um 1

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 1123 | [illegible] |
| 110 | 1127 | [illegible] |
| 29 | 1136 | [illegible] |
| 38 | 1145 | [illegible] |
| 47 | 1226 | [illegible] |
| 56 | 1235 | [illegible] |
| 119 | 1244 | [illegible] |
| 128 | 1334 | [illegible] |
| 137 | 2225 | [illegible] |
| 146 | 2234 | [illegible] |
| 155 | 2333 | |
| 227 | | |
| 236 | | |
| 245 | | |
| 335 | | |
| 344 | | |

nämlich die aufeinanderfolgenden [illegible]
Klassen zur Summe 16 — 5 = [illegible]
angefangen bis zur fünften.

Es ist also, wenn man [illegible]
gesetzt denkt, $C_k^{s+k}$ der Ausdruck [illegible]
welche in den ersten $k$ Combinationen [illegible]
ten sind. Nimmt man $k =$ [illegible]
Anzahl aller möglichen [illegible]
demnach für jeden ganzen [illegible]
vorgestellt wird.

torische Operation, welche die Werthe der veränderlichen Größen für sämmtliche Glieder des combinatorischen Aggregates darbietet, nebst den Elementen, worüber sie sich erstreckt, kennen.

Wir werden es hier bloß mit solchen combinatorischen Aggregaten zu thun haben, bei welchen die Complexionen der Werthe der im allgemeinen Gliede befindlichen veränderlichen Größen aus den positiv genommenen natürlichen Zahlen

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots x.$$

entspringen, und das System aller möglichen ganzen positiven Auflösungen gewisser Gleichungen, welche die Bedingungsgleichungen der veränderlichen Größen heißen sollen, unter der Voraussetzung darstellen, daß man, in so fern diese Gleichungen mit einander in keinem Zusammenhange stehen, die Auflösungen jeder einzelnen mit den Auflösungen der übrigen, so oft es angeht, verbindet.

Die einfachste und natürlichste Bezeichnung der combinatorischen Aggregate dieser Art ist die von Rothe gebrauchte. Man schreibt vor das allgemeine Glied ein Summenzeichen, wozu wir den Buchstaben S verwenden wollen; darunter setzt man in abgesonderten, die Rechnung stets begleitenden, Zeilen das Verzeichniß der als veränderlich zu behandelnden Größen, und die Bedingungsgleichungen ihrer Werthe. Um zu vermeiden, daß das Zeichen S auf Größen bezogen werde, welche nicht mehr zum allgemeinen Gliede eines combinatorischen Aggregates gehören, wird man dieses allgemeine Glied nach dem Summenzeichen, wenn es nöthig ist, in Klammern einschließen.

Zur Erläuterung des hier Gesagten wollen wir den in 39 bewiesenen Satz, der, wie man leicht sieht, die Reduction eines combinatorischen Aggregates auf einen einfachen Ausdruck ausspricht, in den abkürzenden Zeichen darstellen.

Es ist

$$\mathcal{S}\frac{a!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\,\&c.}\cdot\frac{b!}{\beta_1!\beta_2!\beta_3!\,\&c.}\cdot\frac{c!}{\gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!\,\&c.}\,\&c. = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\,\&c.}$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots]$$

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots=a\\
\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots=b\\
\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots=c\\
\quad\&c.\\
\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots=\alpha\\
\alpha_2+\beta_2+\gamma_2+\ldots=\beta\\
\alpha_3+\beta_3+\gamma_3+\ldots=\gamma\\
\quad\&c.
\end{array}\right| \qquad a+b+c+\ldots=n$$

Die Zeile

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots]$$

enthält das Verzeichniß aller veränderlichen Größen des hinter dem Summenzeichen stehenden allgemeinen Gliedes. Darauf folgen die Bedingungsgleichungen, deren ganze positive Auflösungen die Werthe dieser veränderlichen Größen sind. Die Gleichung

$$a + b + c + \ldots = n$$

gehört aber nicht unter die erwähnten Bedingungsgleichungen, sondern drückt bloß eine Abkürzung aus, was leicht dadurch erkannt wird, daß die Größen a, b, c . . . und n im Verzeichnisse der veränderlichen Größen nicht vorkommen.

## 55.

Aus dem Wesen dieser Bezeichnung fließen folgende Sätze:

1.) Steht ein Summenzeichen vor einem aus mehreren Theilen zusammengesetzten allgemeinen Gliede, so kann man das betreffende combinatorische Aggregat in mehrere andere zerlegen, indem man das Summenzeichen jedem einzelnen dieser Theile

vorsetzt; denn eine Summe mehrerer Größen kann auch als eine Summe abgesonderter Parthien dieser Größen betrachtet werden.

2) Umgekehrt lassen sich combinatorische Aggregate durch Addition vereinigen, wenn man das Summenzeichen auf die Summe ihrer allgemeinen Glieder bezieht.

3) Enthält das allgemeine Glied eines combinatorischen Aggregates einen von den veränderlichen Größen freien Factor, so kann dieser auch vor das Summenzeichen geschrieben werden; denn er ist in jedem Gliede des Aggregates vorhanden, folglich auch ein Factor der Summe dieser Glieder oder des Aggregates selbst.

4) Umgekehrt wird ein combinatorisches Aggregat mit einer, von den veränderlichen Größen des allgemeinen Gliedes unabhängigen Größe multiplicirt, wenn man dieselbe dem allgemeinen Gliede als Factor beigesellt.

5) Sind combinatorische Aggregate, deren allgemeine Glieder in keinem Zusammenhange stehen, mit einander zu multipliciren, so findet man ihr Product, wenn man das Product der allgemeinen Glieder als das allgemeine Glied eines neuen combinatorischen Aggregates betrachtet, welches sich auf die in Verbindung gesetzten Bedingungsgleichungen der Factoren bezieht. Es ist nämlich jedes combinatorische Aggregat überhaupt eine zusammengesetzte Größe, und das Product zusammengesetzter Größen wird erhalten, wenn man jeden Theil der einen mit jedem Theile der andern multiplicirt; daher ist das allgemeine Glied des Productes das Product der allgemeinen Glieder der Factoren.

6) Befindet sich in dem allgemeinen Gliede eines combinatorischen Aggregates ein Factor, welcher für sich ein combinatorisches Aggregat ist, dessen allgemeines Glied aber durch den jedesmaligen Werth des andern, außer dem Bereiche seines Summenzeichens stehenden, Factors auf keine Weise modificirt wird,

so kann man diesen andern Factor hinter das Summenzeichen des ersteren setzen, und die nun unmittelbar auf einander folgenden Summenzeichen, indem man alle Bedingungsgleichungen zusammen bestehen läßt, in eines zusammenziehen.

Mehrere Sätze über diesen Gegenstand findet man in der mit vielem Scharfsinne abgefaßten Schrift:

»Theorie der combinatorischen Integrale, erfunden, dargestellt, und mit mehrern Anwendungen auf die Analysis versehen von Heinrich August Rothe u. s. w. Nürnberg 1820.«

56.

Indessen werden sich uns in der Folge größtentheils nur solche combinatorische Aggregate darbieten, deren Glieder aus einer allgemeinen Form dadurch entspringen, daß man statt einer einzigen darin vorkommenden unbestimmten Größe, von irgend einer ganzen positiven Zahl, die auch = o seyn kann, angefangen, die darauf folgenden stets um die Einheit wachsenden Zahlen, entweder bis zu einer festgesetzten Gränze oder auch ohne Ende fort substituirt. Derlei combinatorische Aggregate sind z. B. die Polynome

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$
$$A_0 x^h + A_1 x^{h+t} + A_2 x^{h+2t} + A_3 x^{h+3t} + \text{ꝛc.}$$

Obschon dieselben durch die in 54 erklärte Bezeichnung auf folgende Art dargestellt werden können:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = \mathfrak{S}_{[r,\sigma,\tau]}^{r-\sigma=1,\ r+\tau=n} A_r$$

$$A_0 x^h + A_1 x^{h+t} + A_2 x^{h+2t} + A_3 x^{h+3t} + \text{ꝛc.} = \mathfrak{S}_{[r]} A_r x^{h+rt}$$

wobei für das erste Polynom die in dem allgemeinen Gliede desselben nicht vorkommenden veränderlichen Größen $\sigma$ und $\tau$ bloß deßwegen zu Hülfe genommen worden sind, um die Wer-

the von r zwiſchen 1 und n einzuſchränken, wenn man nämlich der einmal gemachten Vorausſetzung, alle möglichen ganzen poſitiven Auflöſungen der Bedingungsgleichungen als die Werthe der veränderlichen Größen anzuſehen, treu bleiben will; ferner für das zweite Polynom der Mangel einer Bedingungsgleichung erſichtlich machen ſoll, daß der veränderliche Zeiger r alle Werthe, von o angefangen, ohne Ende fort erhalten könne: ſo werden wir doch derlei combinatoriſche Aggregate nicht unzweckmäßig dadurch andeuten, daß wir das Zeichen der veränderlichen Größe (welche wir in dieſem Falle den veränderlichen oder allgemeinen Zeiger der Glieder des betreffenden combinatoriſchen Aggregates nennen wollen) über das Summenzeichen, und ihren niedrigſten und höchſten Werth, beide durch einen Beiſtrich von einander getrennt, unter das Summenzeichen ſchreiben. Iſt der Endwerth des veränderlichen Zeigers unbeſtimmt, ſo reicht es hin, bloß den Anfangswerth deſſelben unter dem Summenzeichen anzugeben.

Demnach iſt:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = \sum_{1,n}^{r} A_r$$

$$A_0 x^h + A_1 x^{h+t} + A_2 x^{h+2t} + A_3 x^{h+3t} + \ldots = \sum_{0}^{r} A_r x^{h+rt}$$

57.

Folgende auf dieſe Bezeichnung ſich gründende Reductionen können in der Rechnung oft mit Vortheil angewendet werden:

1) Eine Größe, welche von dem Zeiger r abhängt, gibt für beſtimmte Werthe von r dieſelben Reſultate, welche der Zeiger r—w veranlaßt, wenn man ſtatt r die um w vergrößerten vorigen Werthe ſetzt. Daher iſt z. B.

$$\sum_{0,n}^{r} A_r x^{h+rt} = \sum_{w,w+n}^{r} A_{r-w} x^{h-wt+rt}$$

2) Sind zwei von r wie immer abhängende Größen $A_r$, $B_r$ einander gleich, ſo iſt auch für einerlei Werthe von r,

$$\overset{r}{\underset{}{\mathfrak{S}}} A_r = \overset{r}{\underset{}{\mathfrak{S}}} B_r$$

z. B. $\overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} A_r = \overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_r$

Denn es iſt wegen $A_r = B_r$ auch

$$A_o = B_o$$
$$A_1 = B_1$$
$$A_2 = B_2$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$A_n = B_n \text{ folglich}$$

$$A_o + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n =$$
$$= B_o + B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n$$

$$\text{d. h. } \overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} A_r = \overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_r$$

3) Aus der Gleichung $A_r = B_r$ läßt ſich, nach dem ſo eben gebrauchten Verfahren, die Gleichung

$$A_o - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots \pm A_n =$$
$$= B_o - B_1 + B_2 - B_3 + \ldots \pm B_n$$

ableiten. Um dieſelbe mit Hülfe der Summenzeichen darzuſtellen, multiplicire man $A_r$ und $B_r$ mit $(-1)^r$ und nehme beiderſeits für einerlei Grenzwerthe von r, z. B. für $r = o$ und $r = n$ die Summen, ſo iſt

$$\overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} (-1)^r A_r = \overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} (-1)^r B_r$$

welche Gleichung, da $(-1)^r$ für gerade Werthe von r poſitiv, und für ungerade Werthe negativ wird, mit der obigen zuſammenfällt.

4) Bezieht ſich der veränderliche Zeiger eines combinatoriſchen Aggregates auf die Grenzen a, b, und ſind c, $c + 1$ zwei zwiſchen a und b liegende Nachbarzahlen, ſo läßt ſich die-

ſes Aggregat in zwei andere zerfällen, wovon dem einen a, c, dem andern c+1, b als Grenzwerthe des Zeigers zukommen; das heißt, es iſt allgemein:

$$\sum_{a,b}^{r} A_r = \sum_{a,c}^{r} A_r + \sum_{c+1,b}^{r} A_r$$

58.

Wir werden unſere in 56 erklärte Bezeichnung oft mit großer Bequemlichkeit auch auf den Fall ausdehnen, wenn in der allgemeinen Form der Glieder eines Polynoms mehrere unbeſtimmte Größen vorhanden ſind, indem wir mehrere Summenzeichen, für jede Größe eines, zu Hülfe nehmen.

Es ſey z. B. das Polynom

$$\begin{aligned}
&A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_0 B_2 + A_0 B_3 + \ldots\ldots + A_0 B_n \\
&+ A_1 B_0 + A_1 B_1 + A_1 B_2 + A_1 B_3 + \ldots\ldots + A_1 B_n \\
&+ A_2 B_0 + A_2 B_1 + A_2 B_2 + A_2 B_3 + \ldots\ldots + A_2 B_n \\
&+ A_3 B_0 + A_3 B_1 + A_3 B_2 + A_3 B_3 + \ldots\ldots + A_3 B_n \\
&\qquad\qquad \text{2c.} \\
&+ A_m B_0 + A_m B_1 + A_m B_2 + A_m B_3 + \ldots\ldots + A_m B_n
\end{aligned}$$

gegeben, ſo würde dasſelbe, nach 54, auf folgende Art bezeichnet werden müſſen:

$$\begin{gathered}
\sum A_r B_s \\
[r, s, \tau, \omega] \\
r + \tau = m \\
s + \omega = n.
\end{gathered}$$

Allein man kann dieſes Polynom, indem man, der obigen Anordnung gemäß, jede horizontale Zeile für ein Glied desſelben gelten läßt, als ein aus Gliedern, deren allgemeine Form

$$\begin{aligned}
&A_r B_0 + A_r B_1 + A_r B_2 + A_r B_3 + \ldots\ldots A_r B_n = \\
&\qquad = A_r (B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + \ldots\ldots + B_n)
\end{aligned}$$

d. h. $\overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} A_r B_s = A_r \overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_s$ ist,

zusammengesetztes betrachten, und es daher durch das Zeichen

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} \overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} A_r B_s = \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} \left[ A_r \overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_s \right]$$

vorstellen, wobei die Klammern angebracht sind, um

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} \left[ A_r \overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_s \right]$$

von dem Producte der Ausdrücke

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r \text{ und } \overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_s \text{ zu unterscheiden.}$$

Ferner kann man auch in dem obigen Polynom jede verticale Columne für ein Glied desselben ansehen, und

$$A_0 B_s + A_1 B_s + A_2 B_s + A_3 B_s + \ldots\ldots + A_m B_s =$$
$$= (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_m) B_s$$

oder

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r B_s = B_s \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r$$

als die allgemeine Form seiner Glieder aufstellen, wodurch man auf die Bezeichnung

$$\overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r B_s = \overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} \left[ B_s \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r \right]$$

geführt wird.

Man hat also für das erwähnte Polynom folgende vier symbolische Darstellungen:

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} \overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} A_r B_s \quad , \quad \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} \left[ A_r \overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_s \right],$$

$$\overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r B_s \quad , \quad \overset{s}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} \left[ B_s \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r \right]$$

Die Identität der obern zwei Formen, so wie auch die der untern, läßt sich unmittelbar aus 55, 3) ableiten.

Aus der Identität der beiden untereinander gesetzten Darstellungen ist ersichtlich, daß man zwei unmittelbar auf einander folgende Summenzeichen, die sich auf Grenzwerthe der Zeiger beziehen, zwischen welchen kein Zusammenhang besteht, mit Beibehaltung dieser Grenzwerthe, gegenseitig verwechseln könne.

Diese Verwechslung findet auch dann Statt, wenn die Grenzwerthe des Zeigers eines Summenzeichens, durch den jedesmaligen Werth des dem andern Summenzeichen gehörenden Zeigers bestimmt werden, nur unterliegen dann diese Grenzwerthe einer aus ihrer gegenseitigen Abhängigkeit leicht erkennbaren Veränderung, wie aus nachstehendem Beispiele zu ersehen ist.

Es sey das Polynom

$$\left.\begin{matrix} A_0B_0x^h + A_0B_1 \\ + A_1B_0 \end{matrix}\right\} x^{h+t} \left.\begin{matrix} + A_0B_2 \\ + A_1B_1 \\ + A_2B_0 \end{matrix}\right\} x^{h+2t} \left.\begin{matrix} + A_0B_3 \\ + A_1B_2 \\ + A_2B_1 \\ + A_3B_0 \end{matrix}\right\} x^{h+3t} + \text{&c.}$$

$$\left.\begin{matrix} \ldots\ldots + A_0B_m \\ + A_1B_{m-1} \\ + A_2B_{m-2} \\ + \ldots\ldots \\ + A_{m-1}B_1 \\ + A_mB_0 \end{matrix}\right\} x^{h+mt}$$

gegeben, so findet man dasselbe, in so fern es als ein Aggregat horizontaler Reihen betrachtet wird

$$= \overset{s}{\underset{0,m}{\Sigma}}(A_s B_0 x^{h+st} + A_s B_1 x^{h+(s+1)t} + \ldots\ldots + A_s B_{m-s} x^{h+mt})$$

$$= \overset{s}{\underset{0,m}{\Sigma}} \overset{r}{\underset{s,m}{\Sigma}} A_s B_{r-s} x^{h+rt} = \overset{s}{\underset{0,n}{\Sigma}} \left[ A_s \overset{r}{\underset{s,m}{\Sigma}} B_{r-s} x^{h+rt} \right]$$

Sieht man aber dieſes Polynom als ein Aggregat verticaler Columnen an, ſo entſpricht ihm das Zeichen

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}}\ \overset{s}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}\ A_s\, B_{r-s}\, x^{h+rt} = \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}}\left[x^{h+rt}\ \overset{s}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}\ A_s\, B_{r-s}\right]$$

Es beſteht alſo auch die Gleichung:

$$\overset{s}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}}\left[A_s\ \overset{r}{\underset{s,m}{\mathfrak{S}}}\ B_{r-s}\, x^{h+rt}\right] = \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}}\left[x^{h+rt}\ \overset{s}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}\ A_s\, B_{r-s}\right]$$

Um einen Theil dieſer Gleichung, z. B. den zweiten, aus dem andern abzuleiten, ohne der vorläufigen Entwickelung eines jeden Aggregates zu benöthigen, wird man im erſten Theile der Gleichung, vermöge 55, 3), zuerſt die von r unabhängige Größe $A_s$ hinter das zweite Summenzeichen ſtellen; die nun unmittelbar auf einander folgenden Summenzeichen verwechſeln, und bedenken, daß, wenn früher s aller ganzen poſitiven Werthe, von o angefangen bis m fähig war, und r alle ganzen poſitiven Werthe, von dem jedesmaligen Werthe des s angefangen bis m erhielt, nun, da mit der Beſtimmung von r angefangen wird, dieſer Zeiger alle Werthe von o bis m erhalten kann; daß aber, weil früher r nicht unter dem jedesmaligen Werthe von s anfing, jetzt umgekehrt s den jedesmaligen Werth von r nicht überſchreiten darf. Endlich wird man den von s unabhängigen Factor $x^{h+rt}$ zwiſchen beide Summenzeichen ſetzen.

Wollte man jedoch die in 54 auseinander geſetzte Bezeichnung brauchen, ſo müßte man obiges Polynom ſo darſtellen:

$$\mathfrak{S}\ A_s\, B_w\, x^{h+rt}$$
$$[s, w, r, \infty]$$
$$r + \infty = m$$
$$s + w = r.$$

## 59.

Der Inbegriff der Combinationen n gegebener Elemente $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$ mit Wiederholungen zur kten Klaſſe

läßt ſich unter der Geſtalt eines combinatoriſchen Aggregates darſtellen; eine Bemerkung, die uns in der Folge öfters nützlich ſeyn wird.

Bildet man nämlich dieſe Combinationen, ſo erhält man erſtlich Complexionen, in welchen ein beſtimmtes Element, z. B. $A_x$ gar nicht vorkommt; dann ſolche, in welchen es 1mal, 2mal, 3mal ... enthalten iſt, endlich eine Complexion, in welcher bloß dieſes Element, alſo kmal, erſcheint. Jede der genannten Gattungen der Combinationen läßt wieder Abtheilungen in Bezug auf das Vorkommen eines andern Elementes, z. B. $A_2$ zu, und für jede dieſer Abtheilungen gibt es wieder Unterabtheilungen in Hinſicht auf ein drittes Element u. ſ. w. Da bei dem Multipliciren der in einer Complexion beiſammenſtehenden Elemente aus jedem derſelben eine Potenz entſpringt, deren Exponent anzeigt, wie oft dieſes Element in der Complexion vorhanden iſt, wobei, wenn das Element in der ſo eben betrachteten Complexion fehlt, die der Einheit gleiche Potenz desſelben mit dem Exponenten o zu ſetzen iſt, ſo ſieht man, daß die Bildung aller Combinationen der Elemente

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$$

mit Wiederholungen zur kten Klaſſe, als die vollſtändige Darſtellung aller Fälle betrachtet werden kann, welche die Form

$$A_1^a \; A_2^b \; A_3^c \; A_4^d \ldots A_n^g$$

unter der Bedingung liefert, daß man ſtatt a, b, c, d ... g alle ganzen poſitiven Auflöſungen, o mit eingeſchloſſen, welche der Gleichung

$$a + b + c + d + \ldots + g = k$$

entſprechen, ſetzt.

Es iſt daher

$$Cw_k (A_1, A_2, A_3, \ldots A_n) = \mathfrak{S} A_1^a \; A_2^b \; A_3^c \ldots A_n^g$$

$$[a, b, c \ldots g]$$

$$a+b+c+\ldots+g=k$$

Um alle oben erwähnten Fälle zu erschöpfen, wird man sämmtliche Combinationen der Elemente 0, 1, 2, 3 ..... mit Wiederholungen zur Klasse n und zur Summe k aufsuchen, und die Elemente jeder einzelnen Complexion in allen möglichen Versetzungen den Factoren des Productes

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots A_n$$

als Exponenten beilegen.

Die Summe der Zeiger aller in der Complexion

$$A_1^a\ A_2^b\ A_3^c \ldots A_n^g$$

stehenden Elemente beträgt offenbar

$$a + 2b + 3c + \ldots + ng \text{ Einheiten.}$$

Ist also der Inbegriff der Combinationen mit Wiederholungen zur Klasse k und zur Summe s für die Elemente $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ durch ein combinatorisches Aggregat auszudrücken, so muß der oben angegebenen Bedingungsgleichung noch die zweite:

$$a + 2b + 3c + \ldots + ng = s$$

beigefügt werden. Man hat demnach

$$\mathfrak{Cw}_k^s(A_1, A_2, A_3, \ldots A_n) = \mathfrak{S} A_1^a\ A_2^b\ A_3^c \ldots A_n^g$$

$$[a, b, c \ldots g]$$

$$a + b + c + \ldots + g = k$$

$$a + 2b + 3c + \ldots + ng = s$$

Verlangt man die Summe aller Combinationsklassen dieser Elemente hinsichtlich der Zeigersumme s, so bleibt die Gleichung

$$a + b + c + \ldots + g = k \text{ weg, und es ist}$$

$$\mathfrak{Cw}^s(A_1, A_2, A_3 \ldots A_n) = \mathfrak{S} A_1^a\ A_2^b\ A_3^c \ldots A_n^g$$

$$[a, b, c, \ldots g]$$

$$a + 2b + 3c + \ldots + ng = s$$

Soll jede Combinationsform der erwähnten Gattungen noch mit ihrer zugehörigen Versetzungszahl multiplicirt werden, so hat man, weil die Versetzungszahl einer Complexion wie

$A_1^a A_2^b A_3^c \ldots A_n^g$ wobei $a+b+c+\ldots+g=k$ ist,

nach 12 die Form $\frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}\,g!}$ annimmt,

die Gleichungen:

$$pCw_k(A_1, A_2, A_3 \ldots A_n) =$$

$$= \mathfrak{S} \frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}\,g!} A_1^a A_2^b A_3^c \ldots A_n^g$$

$$[a, b, c \ldots g]$$

$$a+b+c+\ldots+g=k$$

$$pCw_k^s(A_1, A_2 A_3 \ldots, A_n) =$$

$$= \mathfrak{S} \frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}\,g!} A_1^a A_2^b A_3^c \ldots A_n^g$$

$$[a, b, c \ldots g]$$

$$a+b+c+\ldots+g=k$$

$$a+2b+3c+\ldots+ng=s$$

$$pCw^s(A_1, A_2, A_3 \ldots A_n) =$$

$$= \mathfrak{S} \frac{(a+b+c+\ldots+g)!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}\,g!} A_1^a A_2^b A_3^c \ldots A_n^g$$

$$[a, b, c \ldots g]$$

$$a+2b+3c+\ldots+ng=s.$$

Wollte man in dem letztern Falle ſtatt $a+b+c+\ldots\ldots+g$ den Buchſtaben k beibehalten, ſo müßte man k in das Verzeichniß der veränderlichen Größen aufnehmen, und die Gleichung $a+b+c+\ldots\ldots g=k$ hinzufügen, welche aber, da ſie hier bloß eine Abkürzung ausdrückt, die Auflöſungen der bereits vorhandenen Bedingungsgleichung

$$a+b+c+\ldots\ldots+ng=s$$

nicht modificirt.

# Drittes Kapitel.

## Arithmetik der Polynome.

60.

Eine der vorzüglichsten Anwendungen der Combinationslehre auf den Calcul besteht in der vollständigen Auflösung des Multiplications-, Divisions- und Potenzirungs-Problems für beliebige Polynome, in Bezug auf welche Probleme das gewöhnliche Verfahren der Arithmetik noch viel zu wünschen übrig läßt. Dieses Verfahren ist nämlich ein recurrirendes, d. h. ein solches, mittelst welchem man ein folgendes Glied des beabsichtigten Resultates nur dann erhält, wenn alle vorhergehenden Glieder bereits berechnet sind. Es handelt sich also noch um eine independente Auflösung gedachter Probleme, durch welche man in den Stand gesetzt wird, jedes einzelne Glied des Resultates, unabhängig von den übrigen Gliedern, für sich allein zu erzeugen. Hiezu ist aber die, nur auf combinatorischem Wege erreichbare, genaue Kenntniß der im Resultate vorhandenen Gruppirung aller zu demselben beitragenden Elemente unerläßlich.

61.

Wir werden im Folgenden erstlich bloß solche Polynome betrachten, bei welchen auf nichts weiter gesehen wird, als daß sie aus Theilen durch Addition oder Subtraction zusammengesetzt sind, und deren allgemeine Form

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = \sum_{0,n}^{r} A_r$$

ist, wobei $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ was immer für einfache oder zusammengesetzte Größen anzeigen; dann aber werden wir unser Augenmerk insbesondere auf jene Polynome richten, welche nach den Potenzen einer Größe, die wir die Hauptgröße nennen wollen, geordnet sind, und bei welchen die Exponenten dieser Potenzen eine arithmetische Progression bilden. Diese letztern Polynome sind unter der allgemeinen Form

$$A_0 x^h + A_1 x^{h+t} + A_2 x^{h+2t} + A_3 x^{h+3t} + \ldots + A_n x^{h+nt} =$$

$$= \sum_{0,n}^{r} A_r x^{h+rt}$$

begriffen, wobei h, t was immer für ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen, und $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ was immer für einfache oder zusammengesetzte Größen, die x nicht enthalten, vorstellen. Bei der Rechnung mit den genannten Polynomen wird es darauf ankommen, alle Resultate nach Potenzen der nämlichen Hauptgröße geordnet zu erhalten.

Uebrigens werden sich die Rechnungsregeln für Polynome von der Form

$$A_0 A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

auch aus jenen, welche für die nach einer Hauptgröße geordneten Polynome gelten, ableiten lassen, da letztere Polynome in erstere übergehen, sobald man die Hauptgröße der Einheit gleich setzt.

### Multiplication der Polynome.

62.

Sind mehrere Polynome, wie

$$\sum_{0,m}^{r} A_r = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_m$$

$$\overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_r = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n$$

$$\overset{r}{\underset{o,p}{\mathfrak{S}}} C_r = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_p$$

u. ſ. w.

mit einander zu multipliciren, ſo findet man, der gewöhnlichen Multiplicationsregel gemäß, das Product derſelben, wenn man zuerſt jedes Glied des erſten Polynoms mit jedem Gliede des zweiten multiplicirt, dann zu jedem der erhaltenen Partialproducte jedes Glied des dritten Polynoms als Multiplicator hinzufügt, und ſo fort, auf dieſelbe Art, die Glieder des vierten, fünften Polynoms u. ſ. w. in die Rechnung einführt. Vergleicht man dieſes Verfahren mit dem in 49 gelehrten des Variirens, mit Berückſichtigung der in 51 gemachten Vorausſetzungen, ſo zeigt es ſich, daß das Product der gegebenen Polynome mit dem Inbegriffe aller Variationsformen übereinſtimmt, zu welchen man gelangt, wenn man jedes Polynom als eine abgeſonderte Reihe von Elementen, und die Glieder desſelben als die Elemente ſelbſt betrachtet.

Es iſt alſo:

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r \cdot \overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_r \cdot \overset{r}{\underset{o,p}{\mathfrak{S}}} C_r \cdot \text{ ꝛc.} = \mathfrak{V}\begin{Bmatrix} A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m \\ B_0, B_1, B_2, B_3 \ldots B_n \\ C_0, C_1, C_2, C_3 \ldots C_p \\ \text{ꝛc.} \end{Bmatrix}$$

## 63.

Es ſeyen nun die zu multiplicirenden Polynome

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r x^{h+rt} =$$

$$= A_0 x^h + A_1 x^{h+t} + A'_2 x^{h+2t} + A_3 x^{h+3t} + \ldots + A_m x^{h+mt}$$

$$\overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_r x^{k+rt} =$$

$$= B_0 x^k + B_1 x^{k+t} + B_2 x^{k+2t} + B_3 x^{k+3t} + \ldots + B_n x^{k+nt}$$

$$\sum_{0,p}^{r} C_r\, x^{l+rt} =$$

$$= C_0 x^l + C_1 x^{l+t} + C_2 x^{l+2t} + C_3 x^{l+3t} + \ldots + C_p x^{l+pt}$$

u. ſ. w.

ſämmtlich nach den Potenzen der nämlichen Hauptgröße x geordnet, deren in arithmetiſcher Progreſſion fortſchreitende Exponenten einerlei Differenz t enthalten. Man verlangt das Product ebenfalls nach den Potenzen von x geordnet.

Werden die gegebenen Polynome nach der gewöhnlichen Regel mit einander multiplicirt, und wird irgend ein Glied des Productes derſelben betrachtet, ſo iſt dieſes offenbar ein Partialproduct aus irgend einem Gliede des erſten Polynoms mit irgend einem Gliede des zweiten, ferner mit irgend einem Gliede des dritten u. ſ. w. Es ſey nun

$A_u\, x^{h+ut}$ das Glied des erſten,

$B_v\, x^{k+vt}$ das Glied des zweiten,

$C_w\, x^{l+wt}$ das Glied des dritten Polynoms

u. ſ. w.

welches zur Bildung des erwähnten Gliedes im Producte aller Polynome mitgewirkt hat, ſo iſt letzteres Glied

$$= A_u B_v C_w \ldots x^{h+k+l+\ldots+(u+v+w+\ldots)t}$$

oder, wenn man $u + v + w + \ldots = r$ ſetzt,

$$= A_u B_v C_w \ldots x^{h+k+l+\ldots+rt}.$$

Hier iſt r die einzige Größe im Exponenten von x, welche von einem Gliede des Productes der Polynome zum andern einem Wechſel unterliegt. Da aber r zugleich die Summe der den Coefficienten $A_u$, $B_v$, $C_w$, . . . anklebenden Zeiger vorſtellt, ſo enthalten alle Partialproducte, für welche dieſe Zeigerſumme die nämliche iſt, einerlei Potenz von x als Factor, und werden, wenn man das Product der Polynome nach den Potenzen von x ordnet, in ein Glied zuſammengeſtellt. Bedenkt man nun, daß die Glieder des Productes mehrerer Polynome,

so wie sie sich bei dem gewöhnlichen Multipliciren ergeben, die Variationsformen der Polynome sind, deren Glieder als Elemente auftreten; daß folglich die Coefficienten der Potenzen von x als Variationsformen der Coefficienten dieser Potenzen in den einzelnen Polynomen erscheinen, so sieht man, daß beim gehörigen Ordnen des Productes der Polynome eine bestimmte Potenz der Hauptgröße z. B. $x^{h+k+l+\ldots+rt}$ den Inbegriff aller Variationsformen der Elementenreihen

$$\begin{array}{c} A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots A_m \\ B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots B_n \\ C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots C_p \end{array}$$

u. s. w.

für die Summe r zum Coefficienten erhält.

Der niedrigste Werth von r ist o, und der höchste ist $m+n+p\ldots$ welche Summe wir $= s$ setzen wollen. Es ergibt sich also die Gleichung

$$\sum_{o,m}^{r} A_r x^{h+rt} \cdot \sum_{o,n}^{r} B_r x^{k+rt} \cdot \sum_{o,p}^{r} C_r x^{l+rt} \ldots =$$

$$= \sum_{o,s}^{r} \mathfrak{V}^r \begin{Bmatrix} A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m \\ B_0, B_1, B_2, B_3 \ldots B_n \\ C_0, C_1, C_2, C_3 \ldots C_p \end{Bmatrix} x^{h+k+l+\ldots+rt}$$

2c.

## 64.

In dem besondern Falle, wenn bloß zwei Polynome, wie

$$\sum_{o,m}^{r} A_r x^{h+rt} \text{ und } \sum_{o,n}^{r} B_r x^{k+rt}$$

mit einander multiplicirt werden sollen, ist das Product der so eben entwickelten Formel gemäß:

$$= \sum_{o,s}^{r} \mathfrak{V}^r \begin{Bmatrix} A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m \\ B_0, B_1, B_2, B_3 \ldots B_n \end{Bmatrix} x^{h+k+rt}$$

wobei $s = m+n$ gesetzt wird.

Allein es ist offenbar

$$\mathfrak{W}\begin{Bmatrix} A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m \\ B_0, B_1, B_2, B_3 \ldots B_n \end{Bmatrix} =$$

$$= A_0 B_r + A_1 B_{r-1} + A_2 B_{r-2} + A_3 B_{r-3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ A_{r-1} B_1 + A_r B_0$$

$$= \sum_{0,r}^{w} A_w B_{r-w}$$

folglich auch

$$\sum_{0,m}^{r} A_r x^{h+rt} \cdot \sum_{0,n}^{r} B_r x^{k+rt} = \sum_{0,m+n}^{r} \left[ x^{h+k+rt} \sum_{0,r}^{w} A_w B_{r-w} \right]$$

65.

Wir wollen nach der hier gegebenen Methode noch einige, in der Anwendung öfters vorkommende, Producte entwickeln:

1) Es ist

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\ldots = \sum_{0,n}^{r} \mathfrak{S}^{r}\begin{Bmatrix} a, 1 \\ b, 1 \\ c, 1 \\ d, 1 \end{Bmatrix} x^r$$

ꝛc.

wie man leicht findet, wenn man in der allgemeinen Multiplicationsformel (63)

$$h = k = l = \text{ꝛc.} \ldots = 0,\ t = 1$$
$$A_0 = a,\ B_0 = b,\ C_0 = c \text{ ꝛc.}$$
$$A_1 = B_1 = C_1 = \text{ꝛc.} = 1$$
$$A_2 = B_2 = C_2 = \text{ꝛc.} = 0$$
$$A_3 = B_3 = C_3 = \text{ꝛc.} = 0$$

ꝛc.

und die Anzahl der binomischen Factoren $= n$ setzt.

Bei der Bildung der Variationsformen erhalten die Elemente a, b, c, d ... den Zeiger 0, und das allen Reihen gemeinschaftliche zweite Element 1, den Zeiger 1.

Man erzeugt aber unter dieſer Vorausſetzung alle Variationen der n Reihen

a, 1
b, 1
c, 1
d, 1
&c.

zur Summe r, wenn man auf alle möglichen Arten das zweite Element von r Reihen mit den erſten Elementen der übrigen n — r Reihen multiplicirt, oder weil man den Factor 1 bei dem Multipliciren nicht zu berückſichtigen braucht, wenn man, ſo oft es angeht, das Product von n — r der n Elemente a, b, c, d... darſtellt. Dieß heißt aber alle Combinationen der n Elemente a, b, c, d... zur Klaſſe n — r ohne Wiederholungen bilden, daher iſt:

$$\mathfrak{V}^{r}\begin{Bmatrix} a, & 1 \\ b, & 1 \\ c, & 1 \\ d, & 1 \end{Bmatrix} = \mathfrak{C}_{n-r}(a, b, c, d\ldots)$$

&c.

folglich

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\ldots = \sum_{o,n}^{r} \mathfrak{C}_{n-r}(a, b, c, d\ldots)\, x^{r}$$

Für r = n, geht $\mathfrak{C}_{n-r}(a, b, c, d\ldots)$ in $\mathfrak{C}_{o}(a, b, c, d\ldots)$ über, und dafür muß, einer bereits in 53 gemachten Bemerkung zufolge, die Einheit geſetzt werden.

Das hier gefundene Product erſcheint, wenn man das Summenzeichen wegſchafft, nach den ſteigenden Potenzen von x geordnet. Um es nach den fallenden Potenzen der Hauptgröße geordnet zu erhalten, ſetze man r = n — w, wobei w ebenfalls aller ganzen poſitiven Werthe von o angefangen bis n fähig iſt, und es wird

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots = \sum_{o,n}^{w} \mathfrak{C}_{w}(a, b, c, d\ldots)\, x^{n-w}$$

2) Auf demſelben Wege ergibt ſich

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)\ldots = \sum_{0,n}^{r} \mathfrak{R}^r \begin{Bmatrix} 1, & a \\ 1, & b \\ 1, & c \\ 1, & d \end{Bmatrix} x^r$$

ꝛc.

wobei die Anzahl binomiſcher Factoren $= n$ geſetzt wird.

Bei der Bildung der Variationsformen liegt dem allen n Reihen gemeinſchaftlichen erſten Elemente 1 der Zeiger o, und den zweiten Elementen a, b, c, d ... der Zeiger 1 zum Grunde.

Mittelſt ähnlicher Schlüſſe, wie in 1), findet man:

$$\mathfrak{R}^r \begin{Bmatrix} 1, & a \\ 1, & b \\ 1, & c \\ 1, & d \end{Bmatrix} = \mathfrak{C}_r(a, b, c, d \ldots)$$

ꝛc.

daher iſt

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)\ldots = \sum_{0,n}^{r} \mathfrak{C}_r\,(a, b, c, d..)x^r$$

## 66.

Setzt man in einem der zwei ſo eben entwickelten Producte $x=1$, ſo findet man

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\ldots = \sum_{0,n}^{r} \mathfrak{C}_r\,(a, b, c, d\ldots)$$

oder wenn man das erſte Glied des Productes aus der Summe aller Glieder desſelben heraushebt,

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\ldots = 1 + \sum_{1,n}^{r} \mathfrak{C}_r\,(a, b, c, d\ldots)$$

Es iſt daher die Summe aller Combinationsklaſſen der Elemente a, b, c, d ... gleich dem um die Einheit verminderten Producte

$$(1+a)\,(1+b)\,(1+c)\,(1+d)\ldots$$

Dieſer Satz läßt ſich auf die Beſtimmung der Anzahl aller Diviſoren einer ganzen Zahl, deren einfache Factoren gegeben ſind, anwenden *).

Es enthalte die Zahl N die unter ſich verſchiedenen Primzahlen A, B, C, ... F, G, ... K

a mal, b mal, c mal ... f mal, g mal ... k mal

als Factoren, ſo iſt:

$$N = A^a B^b C^c \ldots F^f . G^g \ldots K^k$$

Ein Diviſor von N kann keine andern einfachen Factoren als A, B, C ... K und von keinem derſelben eine höhere Potenz als in N vorkommt, enthalten; unter dieſer Beſchränkung iſt aber jede Zahl von der Form $A^u B^v C^w \ldots$ ein Theiler von N.

Will man nun einen Diviſor der Zahl N bilden, deſſen einfache Factoren bloß in r gegebenen aus den Primzahlen A, B, C ... F, G ... K z. B. in A, B, C ... F beſtehen, ſo kann man hiezu entweder die erſte oder die zweite oder die dritte u. ſ. w. oder endlich die ate Potenz von A nehmen; in jedem dieſer Fälle kann man eine der Potenzen B, $B^2$, $B^3$ ... $B^b$ als Factor hinzufügen, und zu jeder Combination der Potenzen von A und B kann eine der Potenzen C, $C^2$, $C^3$ ... $C^c$ als Factor hinzukommen u. ſ. w. Es kann alſo ein Diviſor von N, in welchem bloß die r gegebenen Primzahlen A, B, C ... F erſcheinen, auf ſo viel verſchiedene Arten erzeugt werden, als das Product der r dieſen Primzahlen zu geſtattenden höchſten Exponenten nämlich a. b. c ... f Einheiten enthält. Die Anzahl der Diviſoren von N, welche ſich überhaupt auf r aus den Primzahlen A, B, C ... K beziehen, wird demnach, wenn dieſe Primzahlen nach Belieben hiezu verwendet werden können, durch die Summe der Combinationen

*) Dieſe Anwendung wurde mir von meinem verehrten Freunde, Herrn Salomon, Prof. am k. k. polytechniſchen Inſtitute, mitgetheilt.

der Exponenten a, b, c . . . k zur rten Klaſſe, ohne Wiederholungen, ausgedrückt.

Hieraus folgt, daß die Anzahl aller möglichen die Einheit überſteigenden Diviſoren von N durch die Summe aller Combinationsklaſſen für die Exponenten a, b, c . . . k angezeigt wird. Dieſe Anzahl iſt demnach $= (1+a)(1+b)(1+c) \ldots - 1$.

Rechnet man aber auch die Einheit zu den Diviſoren der Zahl N, ſo erhält man für die Anzahl derſelben den Ausdruck $(1+a)(1+b)(1+c) \ldots$

## 67.

Auch der Quotient

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots \text{ ꝛc.}}$$

kann nach dem früher erklärten Verfahren entwickelt werden.

Durch das gewöhnliche Diviſionsverfahren überzeugt man ſich nämlich ohne Schwierigkeit, daß der Bruch $\frac{1}{1-ax}$ durch die unendliche Reihe

$$1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + a^4x^4 + \text{ ꝛc.}$$

ausgedrückt wird. Es iſt daher

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{0}^{r} a^r x^r$$

Eben ſo ergibt ſich

$$\frac{1}{1-bx} = \sum_{0}^{r} b^r x^r$$

$$\frac{1}{1-cx} = \sum_{0}^{r} c^r x^r$$

u. ſ. w.

folglich

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots \text{ ꝛc.}} =$$

$$= \sum_{0}^{r} a^r x^r \cdot \sum_{0}^{s} b^r x^r \cdot \sum_{0}^{r} c^r x^r \ldots \text{ ꝛc.} =$$

$$= \mathfrak{S}^{r}_{\bullet} \mathfrak{V}^{r} \begin{Bmatrix} a^0\, a^1, a^2, a^3 \ldots \\ b^0, b^1, b^2, b^3 \ldots \\ c^0, c^1, c^2, c^3 \ldots \\ \text{\&c.} \end{Bmatrix} x^r \quad (63)$$

Bei der Bildung der Variationsformen dienen die Exponenten der Elemente zugleich als ihre Zeiger.

Der Ausdruck $\mathfrak{V}^{r} \begin{Bmatrix} a^0, a^1, a^2, a^3 \ldots \\ b^0, b^1, b^2, b^3 \ldots \\ c^0, c^1, c^2, c^3 \ldots \\ \text{\&c.} \end{Bmatrix}$

ist offenbar der Inbegriff der Fälle, welche das Product

$$a^a\, b^b\, c^c \ldots$$

unter der Voraussetzung darbietet, daß die Exponenten

$$a, b, c, \ldots$$

stets die Summe r ausmachen, übrigens aber aller Werthe, die in der mit o anfangenden natürlichen Zahlenreihe liegen, fähig sind, d. h. es ist

$$\mathfrak{V}^{r} \begin{Bmatrix} a^0, a^1, a^2, a^3 \ldots \\ b^0, b^1, b^2, b^3 \ldots \\ c^0, c^1, c^2, c^3 \ldots \\ \text{\&c.} \end{Bmatrix} = \mathfrak{S}_{[a, b, c \ldots]}^{a+b+c+\ldots=r} a^a\, b^b\, c^c \ldots$$

Allein, wie aus 59 erhellet, ist auch

$$\mathfrak{Cw}_r (a, b, c \ldots) = \mathfrak{S}_{[a, b, c \ldots]}^{a+b+c+\ldots=r} a^a\, b^b\, c^c \ldots$$

daher besteht die Gleichung

$$\mathfrak{V}^{r} \begin{Bmatrix} a^0, a^1, a^2, a^3 \ldots \\ b^0, b^1, b^2, b^3 \ldots \\ c^0, c^1, c^2, c^3 \ldots \\ \text{\&c.} \end{Bmatrix} = \mathfrak{Cw}_r (a, b, c \ldots)$$

und es ist

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots \text{\&c.}} = \mathfrak{S}^{r}_{\bullet} \mathfrak{Cw}_r (a, b\, c \ldots) x^r$$

Beiſpiel. Man verlangt das fünfte Glied des Quotienten

$$\frac{1}{(1-2x)(1+5x)(1-6x)}$$

Dieſes Glied enthält $x^4$ als Factor. Um den Coefficienten desſelben zu finden, wird man die Summe der Quaternen mit Wiederholungen für die Elemente

$$+2, -5, +6$$ aufſuchen.

Die Quaternen ſelbſt ſind:

| | | |
|---|---|---|
| $2^4 = 16$ | $2^2.6^2 = 144$ | $5^4 = 625$ |
| $-2^3.5 = -40$ | $-2.5^3 = -250$ | $-5^3.6 = -750$ |
| $2^3.6 = 48$ | $2.5^2.6 = 300$ | $5^2.6^2 = 900$ |
| $2^2.5^2 = 100$ | $-2.5.6^2 = -360$ | $-5.6^3 = -1080$ |
| $-2^2.5.6 = -120$ | $2.6^3 = 432$ | $6^4 = 1296$ |

Die Summe dieſer Quaternen beträgt 1261, daher iſt das verlangte Glied $= 1261\,x^4$.

## Potenzirung der Polynome für ganze poſitive Exponenten.

### 68.

Soll ein Polynom, deſſen Glieder nicht nach den Potenzen einer Hauptgröße geordnet ſind, wie

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \text{ꝛc.} + A_m$$

auf die nte Potenz erhoben werden, wobei n eine ganze poſitive Zahl anzeigt, ſo braucht man nur nach der in 62 vorgetragenen Formel das Product von n Polynomen zu ſuchen, deren jedes dem vorgelegten gleich iſt.

Man findet demnach:

$$\left[\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r\right]^n = \mathfrak{P}\begin{Bmatrix} A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m \\ A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m \\ A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m \end{Bmatrix}$$

Allein, wie in 52 gezeigt wurde, ist

$$\mathfrak{R}\begin{Bmatrix} A_0, A_1, A_2, A_3 \dots A_m \\ A_0, A_1, A_2, A_3 \dots A_m \\ A_0, A_1, A_2, A_3 \dots A_m \\ \text{\&c.} \end{Bmatrix} = pCw_n\,(A_0, A_1, A_2, A_3 \dots A_m)$$

daher hat man:

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A_r\right]^n = pCw_n\,(A_0, A_1 A_2, A_3 \dots A_m)$$

und dieß ist der sogenannte polynomische Lehrsatz oder die Polynomialformel für einen ganzen positiven Exponenten.

69.

Man kann diese Formel noch auf andere, zur Rechnung bequemere, Gestalten bringen.

Es ist nämlich (59)

$$pCw_n\,(A_0, A_1, A_2, A_3 \dots A_n) = \sum_{[a, b, c \dots g]} \frac{n!}{a!\,b!\,c!\,\text{\&c.}\,g!} A_0^a A_1^b A_2^c \dots A_m^g$$

$$a + b + c + \dots + g = n$$

folglich ist auch

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A_r\right]^n = \sum_{[a, b, c \dots g]} \frac{n!}{a!\,b!\,c!\,\text{\&c.}\,g!} A_0^a A_1^b A_2^c \dots A_m^g$$

$$a + b + c + \dots + g = n.$$

Der entwickelte Ausdruck $\left[\sum_{0,m}^{r} A_r\right]^n$ wird aus so viel Gliedern bestehen, als die $m+1$ Größen $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots A_m$ Combinationen mit Wiederholungen zur nten Klasse zulassen; die Anzahl der Glieder muß daher $= \binom{m+n}{n}$ seyn. (31.)

Da in der obigen Formel diejenigen der Größen

$$A_0, A_1, A_2, \dots A_m$$

welche den Exponenten o bekommen, der Einheit gleich werden,

also auf den Werth der Complexion, zu welcher sie gehören, keinen Einfluß haben, und deshalb unbeachtet bleiben können; ferner, da es bei der Gleichung

$$a + b + c + \ldots + g = n$$

auch nur auf die von o verschiedenen Werthe der Größen a, b, c, . . . g ankommt, so wird man am zweckmäßigsten verfahren, wenn man alle Combinationen mit Wiederholungen zur Summe n für die Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . . aufsucht, und die Elemente jeder dieser Combinationen, so oft es möglich ist, auf die Größen $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ . . . $A_m$ als Exponenten überträgt. Dieß geschieht, indem man alle Combinationsformen von $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ . . . $A_m$ ohne Wiederholungen zu eben der Klasse bildet, zu welcher die an die Reihe kommende Exponenten-Gruppe gehört, und dann jeder einzelnen Combinationsform diese Exponenten-Gruppe in allen möglichen Versetzungen beifügt.

Der Coefficient $\frac{n!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}\,g!}$ erhält immer denselben Werth, sobald die Werthe von a, b, c . . . g dieselben bleiben, in welcher Ordnung sie übrigens gesetzt werden mögen; daher werden alle aus der nämlichen Exponenten-Gruppe entspringenden Glieder obiger Formel, mit einerlei Coefficienten versehen seyn.

Wir wollen die Summe der Glieder, welche entstehen, indem man alle Combinationen der Größen $A_0, A_1, A_2, A_3 .. A_m$ zur so vielten Klasse bildet, als eine gegebene Exponenten-Gruppe a, b, c . . . Elemente umfaßt, und dann den Factoren jeder Combination diese Exponenten in allen möglichen Versetzungen beilegt, durch das Symbol $\{a, b, c \ldots\}$ andeuten.

Hiedurch erlangt die oben angegebene Polynomialformel folgende Gestalt:

$$\left[\mathop{\mathfrak{S}}_{o,m}^{r} A_r\right]^n = \mathfrak{S} \frac{n!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}} \{a, b, c \ldots\}$$

wobei ſtatt a, b, c . . . jedesmal die Elemente einer andern Complexion der zur Summe n mit Wiederholungen combinirten Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . ꝛc. zu ſetzen ſind.

Beiſpiele. Es ſey n = 2, ſo ergeben ſich folgende Werthe für a, b, $\frac{n!}{a!\,b!}$:

$$a = 1,\ b = 1,\ \frac{n!}{a!\,b!} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 2$$

$$a = 2,\quad \frac{n!}{a!} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 1$$

daher hat man:

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A_r\right]^2 = \{2\} + 2\{1,1\}$$

Dieſe Gleichung drückt folgenden Satz aus: Das Quadrat eines Polynoms iſt den Quadraten ſeiner Glieder und den doppelten Producten aus je zweien derſelben zuſammen genommen gleich.

Iſt n = 3, ſo erhält man:

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1,\ \frac{n!}{a!\,b!\,c!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 6$$

$$a = 1,\ b = 2,\quad \frac{n!}{a!\,b!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 3$$

$$a = 3,\quad \frac{n!}{a!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$$

also $\left[\sum_{0,m}^{r} A_r\right]^3 = \{3\} + 3\{1,2\} + 6\{1,1,1\}$

Es wird nämlich die dritte Potenz eines Polynoms gefunden, wenn man die Würfel ſeiner Glieder, die dreifachen Producte der erſten Potenzen und der Quadrate je zweier, endlich alle ſechsfachen Producte je dreier Glieder addirt.

Eben so findet man für $n = 4$,

$a = 1, b = 1, c = 1, d = 1, \quad \frac{n!}{a!\,b!\,c!\,d!} = \frac{1.2.3.4}{1.1.1.1} = 24$

$a = 1, b = 1, c = 2, \quad \frac{n!}{a!\,b!\,c!} = \frac{1.2.3.4}{1.1.1.2} = 12$

$a = 1, b = 3, \quad \frac{n!}{a!\,b!} = \frac{1.2.3.4}{1.1.2.3} = 4$

$a = 2, b = 2, \quad \frac{n!}{a!\,b!} = \frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$

$a = 4, \quad \frac{n!}{a!} = \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} = 1$

daher ist:

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A_r\right]^4 = \{4\} + 4\{1,3\} + 6\{2,2\} + 12\{1,1,2\} + 24\{1,1,1,1\}$$

u. s. w.

## 70.

Ist das auf die nte Potenz zu erhebende Polynom ein nach den Potenzen einer Hauptgröße, deren Exponenten in arithmetischer Progression fortschreiten, geordnetes, wie

$$\sum_{0,m}^{r} A_r x^{h+rt} =$$

$$= A_0 x^h + A_1 x^{h+t} + A_2 x^{h+2t} + A_3 x^{h+3t} + \ldots + A_m x^{h+mt}$$

so findet man, wenn man in der allgemeinen Multiplicationsformel (63) alle Factoren einander gleich, und die Anzahl derselben $= n$ annimmt:

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A_r x^{h+rt}\right]^n = \sum_{0,mn}^{r} \mathfrak{P}^r \begin{Bmatrix} A_0, A_1, A_2 \ldots A_m \\ A_0, A_1, A_2 \ldots A_m \\ A_0, A_1, A_2 \ldots A_m \end{Bmatrix} x^{nh+rt}$$

2c.

oder wenn man, wie in 52 gezeigt wurde, die Variationen

gleicher Elementenreihen auf Combinationen mit Wiederholungen reducirt:

$$\left[\mathop{\mathfrak{S}}_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n = \mathop{\mathfrak{S}}_{o,mn}^{r} pCw_n^r\,(A_o, A_1, A_2 \ldots A_m)\, x^{nh+rt}$$

dieſe Gleichung drückt eine zweite Form des polynomiſchen Lehrſatzes für einen ganzen poſitiven Exponenten aus.

Sie läßt ſich, wenn man die in 54 gegebene Bezeichnung zu Hülfe nimmt, auch ſo vorſtellen:

$$\left[\mathop{\mathfrak{S}}_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n = \mathop{\mathfrak{S}}_{o,mn}^{r}\left[x^{nh+rt}\,\mathfrak{S}\,\frac{n!}{a!\,b!\,c!\,d!\,\text{ꝛc.}} A_o^a A_1^b A_2^c A_3^d \ldots\right]$$

$$[a, b, c, d \ldots\ldots]$$
$$a+b+c+d+\ldots\ldots = n$$
$$b+2c+3d+\ldots\ldots = r$$

oder

$$\left[\mathop{\mathfrak{S}}_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n = \mathfrak{S}\,\frac{n!}{a!\,b!\,c!\,d!\,\text{ꝛc.}} A_o^a A_1^b A_2^c A_3^d \ldots\ldots\, x^{nh+rt}$$

$$[r, \tau, a, b, c, d \ldots\ldots]$$
$$r+\tau = mn$$
$$a+b+c+d+\ldots\ldots = n$$
$$b+2c+3d+\ldots\ldots = r.$$

Statt, wie es dieſe Formeln fordern, alle Combinationen der Elemente $A_o, A_1, A_2, A_3 \ldots$ mit Wiederholungen zur Klaſſe n und zur Summe r zu bilden, kann man, weil der Zeiger des erſten Elementes = o iſt, alſo auf die Zeigerſumme einer Complexion keinen Einfluß hat, alle Combinationen der Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots$ zur Summe r aufſuchen, deren Klaſſenexponenten die Zahl n nicht überſchreiten. Die Zahlen b, c, d... ſind die Wiederholungs-Zeiger der entſprechenden Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots$ in den dabei erſcheinenden Complexionen. Der Werth von a iſt jedesmal die Ergänzung der Summe

$$b + c + d + \text{ꝛc.}$$

zur Zahl n.

Setzt man nun, der Kürze wegen,

$$b + c + d + \ldots\ldots = k$$

welche Zahl offenbar der Klassenexponent der von $A_1, A_2, A_3 \ldots$ gebildeten Complexion ist, so erhält man $a = n - k$, folglich

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_t x^{h+rt}\right]^n =$$

$$= \sum_{o,mn}^{r} \left[x^{nh+rt} \sum \frac{n!}{(n-k)!\,b!\,c!\,d!\,\text{&c.}} A_o^{n-k} A_1^b A_2^c A_3^d \ldots\right]$$

$$[k, a, b, c, d \ldots\ldots]$$

$$k + a = n$$

$$b + c + d + \ldots\ldots = k$$

$$b + 2c + 3d + \ldots\ldots = r.$$

Beispiel. Es sey das Polynom $2 - 5x - 7x^2 + x^3 + 3x^4$ zur 5ten Potenz zu erheben.

Vergleicht man dasselbe mit der Form $\sum_{o,m}^{r} A_t x^{h+rt}$, so zeigt sich $h = 0$, $t = 1$, $m = 4$; nun ist $n = 5$, folglich $mn = 20$. Es kommen daher in der Entwickelung von

$$(2 - 5x - 7x^2 + x^3 + 3x^4)^5$$

alle Potenzen von $x$, bis zur 20sten vor.

Wir wollen uns hier begnügen, ein Glied der verlangten Potenz des Polynoms, nämlich das achte, oder jenes, in welchem $x^7$ erscheint, zu berechnen, weil daraus hinlänglich erhellen wird, wie die übrigen Glieder zu suchen sind.

Da in unserm gegenwärtigen Falle $r = 7$ ist, und $k$ die Zahl 5 nicht übersteigen darf, so werden wir zuerst alle Combinationen, welche nicht mehr als fünf Stellen enthalten, für die mit den Zeigern 1, 2, 3, 4 versehenen Elemente $-5, -7, +1, +3$ darstellen. Sie sind, wie man aus dem Beispiele in 43 ersieht, wenn man daselbst alle Complexionen, welche zu höhern Klassen als zu der 5ten gehören, und jene, in welchen die Zeiger 5, 6, 7 stehen, wegläßt, folgende:

| | | |
|---|---|---|
| 1 1 1 1 3 | oder wenn man ſtatt | $+ 5^4 . 1$ |
| 1 1 1 2 2 | der Zeiger die Elemen- | $- 5^3 . 7^2$ |
| 1 1 1 4 | te ſetzt: | $- 5^3 . 3$ |
| 1 1 2 3 | | $- 5^2 . 7 . 1$ |
| 1 2 2 2 | | $+ 5 . 7^3$ |
| 1 2 4 | | $+ 5 . 7 . 3$ |
| 1 3 3 | | $- 5 . 1^2$ |
| 2 2 3 | | $+ 7^2 . 1$ |
| 3 4 | | $+ 1 . 3$ |

Jede dieſer Complexionen muß der obigen Formel gemäß mit einer Potenz der Zahl 2, welche den Unterſchied zwiſchen 5 und dem Klaſſenexponenten der Complexion zum Exponenten hat, und noch überdieß mit der Permutationszahl der dadurch entſtandenen fünfſtelligen Complexion multiplicirt werden. Man erhält auf dieſe Art die Producte:

$$+ 5^4 . 1 . 2^0 . \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4} = + 3125$$

$$- 5^3 . 7^2 . 2^0 . \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = - 6250$$

$$- 5^3 . 3 . 2 . \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3} = - 15000$$

$$- 5^2 . 7 . 1 . 2 . \frac{1.2.3.4.5}{1.2} = - 21000$$

$$+ 5 . 7^3 . 2 . \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3} = + 68600$$

$$+ 5 . 7 . 3 . 2^2 . \frac{1.2.3.4.5}{1.2} = + 25200$$

$$- 5 . 1^2 . 2^3 \quad \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2} = - 600$$

$$+ 7^2 . 1 . 2^2 . \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2} = + 5880$$

$$+ 1 . 3 . 2^3 . \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3} = + 480$$

Die Summe derſelben, nämlich + 5435, iſt der Coefficient von $x^7$ in dem verlangten Gliede der Potenz

$$(2 - 5x - 7x^2 + x^3 + 3x^4)^5$$

Die ganze Entwickelung dieſer Potenz iſt:

$$32 - 400x + 1440x^2 + 680x^3 - 11390x^4 + 1955x^5 + 47025x^6 + 5435x^7 - 111845x^8 - 71145x^9 + 108073x^{10} + 119495x^{11} - 36185x^{12} - 86055x^{13} - 8165x^{14} + 31441x^{15} + 9465x^{16} - 5715x^{17} - 2565x^{18} + 405x^{19} + 243x^{20}$$

71.

Die letzte der in 70 erhaltenen Gleichungen, nämlich:

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n =$$

$$= \sum_{o,mn}^{r} \left[x^{nh+rt} \sum \frac{n!}{(n-k)!\,b!\,c!\,d!\,\text{ꝛc.}} A_o^{n-k} A_1^b A_2^c A_3^d \ldots\right]$$

$$[k, a, b, c, d \ldots]$$
$$k + a = n$$
$$b + c + d + \ldots\ldots = k$$
$$b + 2c + 3d + \ldots\ldots = r$$

führt uns auf eine neue Form des polynomiſchen Lehrſatzes.

Es iſt, wie in 36 gezeigt wurde:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \text{ folglich: } \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$$

daher wird

$$\left.\begin{array}{l} \sum \dfrac{n!}{(n-k)!\,b!\,c!\,d!\,\text{ꝛc.}} A_o^{n-k} A_1^b A_2^c A_3^d \ldots \\ [k, a, b, c, d \ldots] \\ k + a = n \\ b + c + d + \ldots\ldots = k \\ b + 2c + 3d + \ldots\ldots = r \end{array}\right\} =$$

$$= \sum \binom{n}{k} \frac{k!}{b!\,c!\,d!\,\text{ꝛc.}} A_o^{n-k} A_1^b A_2^c A_3^d \ldots$$

$$[k, a, b, c, d \ldots]$$
$$k + a = n$$
$$b + c + d + \ldots\ldots = k$$
$$b + 2c + 3d + \ldots\ldots = r$$

Hier ist, wie eine aufmerksame Betrachtung der Bedingungsgleichungen lehrt, wenn $r = o$ gesetzt wird, k des einzigen Werthes o fähig; wird aber $r > o$ angenommen, so bekömmt k alle ganzen positiven Werthe, von 1 angefangen, welche die kleinere der Zahlen r, n nicht übersteigen.

Für jeden einzelnen Werth von k erhalten die unbestimmten Zeiger b, c, d ... alle ganzen positiven Werthe, die Nulle mit eingeschlossen, welche den Bedingungen

$b + c + d + \ldots = k,\ b + 2c + 3d + \ldots = r$

Genüge leisten.

Man kann daher alle Glieder des obigen combinatorischen Aggregates, welchen ein gegebener Werth von k zum Grunde liegt, zusammengenommen durch

$$\binom{n}{k} A_o^{n-k} \mathfrak{S}_{[b,c,d,\ldots]}^{b+c+d+\ldots=k,\ b+2c+3d+\ldots=r} \frac{k!}{b!\,c!\,d!\,\text{&c.}} A_1^b A_2^c A_3^d \ldots$$

vorstellen, wobei $\binom{n}{k}$ und $A_o^{n-k}$ als Factoren, welche diesen Gliedern gemeinschaftlich angehören, vor das Summenzeichen gesetzt worden sind.

Allein es ist (59)

$$\mathfrak{S}_{[b,c,d\ldots]}^{b+c+d+\ldots=k,\ b+2c+3d+\ldots=r} \frac{k!}{b!\,c!\,d!\,\text{&c.}} A_1^b A_2^c A_3^d \ldots = p\mathfrak{C}w_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots)$$

daher zeigt das Product

$$\binom{n}{k} A_o^{n-k}\, p\mathfrak{C}w_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots)$$

den Inbegriff aller Glieder des obigen combinatorischen Aggregates an, in welchen k stets denselben Werth hat.

Insofern daher k alle Werthe, deren es fähig ist, annimmt, ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{S} \dfrac{n!}{(n-k)!\,b!\,c!\,d!\,\text{ꝛc.}} A_0^{n-k} A_1^b A_2^c A^d \ldots \\ [k, a, b, c, d \ldots] \\ k+a=n \\ b+c+d+\ldots\ldots = k \\ b+2c+3d+\ldots\ldots = r \end{array}\right\} =$$

$$= \mathop{\mathfrak{S}}_{o,r}^{k} \binom{n}{k} A_o^{n-k}\, p\mathfrak{C}w_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots)$$

und man erhält:

$$\left[\mathop{\mathfrak{S}}_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n =$$

$$= \mathop{\mathfrak{S}}_{o,mn}^{r} \left[x^{nh+rt} \mathop{\mathfrak{S}}_{o,r}^{k} \binom{n}{k} A_o^{n-k}\, p\mathfrak{C}w_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots)\right]$$

als eine neue Form des polynomischen Lehrsatzes.

## 72.

Sobald der niedrigste Zeiger der zu combinirenden Elemente = 1 ist, gibt es keine Combinationsform mit Wiederholungen, deren Summenexponent weniger beträgt, als der Klassenexponent; denn der erstere wird dem letztern gleich, wenn man alle Stellen der Complexion mit dem ersten Elemente besetzt, und jede Abänderung der Elemente hat entweder eine Erhöhung des Summenexponenten, oder eine Erniedrigung des Klassenexponenten, oder beides zugleich, zur Folge.

Es ist daher, sobald man $k > r$ annimmt,

$\mathfrak{C}w_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots)$, also auch $p\mathfrak{C}w_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots) = o$.

In 53 ist bemerkt worden, daß das Symbol

$$\mathfrak{C}w_o (A_1, A_2, A_3 \ldots)$$

die Einheit anzeigt. Trägt jedoch das Combinationszeichen einen Summenexponenten an sich, so läßt sich auf ähnliche Art zeigen, daß $\mathfrak{C}w_o^r (A_1, A_2, A_3 \ldots)$ sobald $r > o$ ist, der Nulle

gleich zu setzen, hingegen $Cw_0^0(A_1, A_2, A_3 \ldots)$, durch die Einheit zu interpretiren sey. Dasselbe gilt von

$$pCw_0^r(A_1, A_2, A_3 \ldots) \text{ für } r > 0 \text{ und } r = 0.$$

Ferner ist allgemein (31)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots. \quad k}$$

setzt man hier $k > n$, also $k = n + f$, so wird im Zähler dieses Ausdruckes der Factor $n - n = 0$ dem Factor

$$n - (k-1) = -f + 1$$

vorangehen, wenn $f > 1$ ist, und dieser Factor selbst seyn, wenn $f = 1$ ist, wodurch $\binom{n}{k}$ stets den Werth 0 erhält.

Auch ist (39) $\binom{n}{0} = 1$,

Mit Rücksicht auf das hier Gesagte, bedarf es bei dem sich auf k beziehenden Summenzeichen in der obigen Polynomialformel nicht einmal der Andeutung des Endwerthes von k. Man hat nämlich von $k = 0$ angefangen, so viele Glieder des combinatorischen Aggregates zu entwickeln, als dasselbe nur immer darbietet.

Eben so verhält es sich mit dem Umfange der Werthe, welche dem Zeiger r beizulegen sind. Der Klassenexponent k kann die Zahl n nicht überschreiten; das höchste der Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots.$ ist $A_m$, und der höchste Werth des Summenexponenten r entsteht, wenn man das höchste Element so oft als möglich setzt, daher ist der höchste Werth von r das Product mn. Für höhere Werthe von r würden entweder höhere Elemente als wirklich vorhanden sind, oder es würde eine höhere Klasse derselben, als die nte, in Anspruch genommen; im ersten Falle ergibt sich $pCw_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots) = 0$, im zweiten $\binom{n}{k} = 0$, und der Summenausdruck kann nicht weiter fortgesetzt werden.

Wir wollen uns daher begnügen, bloß die Anfangswerthe der Zeiger, worauf sich die Summenzeichen beziehen, anzudeuten, indem wir für jede Summe so viele Glieder zulassen, als sie nur immer enthalten mag, und obige Polynomialformel so darstellen:

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A\ x^{h+rt}\right]^n =$$

$$= \sum_{0}^{r}\left[x^{nh+rt}\sum_{0}^{k}\binom{n}{k}A_0^{n-k}\ pCw_k^r(A_1,A_2,A_3\ldots)\right]$$

73.

Die in 71 bewerkstelligte Transformation ist auch auf die in 68 entwickelte Form des polynomischen Lehrsatzes anwendbar; man findet, ein ähnliches Verfahren befolgend:

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A_s\right]^n = \sum_{0}^{k}\binom{n}{k}A_0^{n-k}\ pCw_k(A_1,A_2,A_3\ldots A_m)$$

Indessen kann diese Gleichung auch aus der Formel in 72 gefolgert werden, wenn man daselbst $x = 1$ setzt. Man erhält nämlich durch diese Voraussetzung:

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A_{r_1}\right]^n = \sum_{0}^{r}\sum_{0}^{k}\binom{n}{k}A_0^{n-k}\ pCw_k^r(A_1,A_2,A_3\ldots A_m)$$

oder, wenn man die beiden Summenzeichen verwechselt (58) und erwägt, daß k nicht größer seyn kann als r, folglich r für jedes einzelne k nur die Werthe k, $k+1$, $k+2$ u. s. w. bis zu der ihm eigenthümlichen Grenze mn anzunehmen vermag:

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A_r\right]^n = \sum_{0}^{k}\sum_{k}^{r}\binom{n}{k}A_0^{n-k}\ pCw_k^r(A_1,A_2,A_3\ldots A_m)$$

oder, weil jetzt der Factor $\binom{n}{k}A_0^{n-k}$ von r nicht abhängt,

$$\left[\sum_{0,m}^{r} A_r\right]^n = \sum_{0}^{k}\left[\binom{n}{k}A_0^{n-k}\sum_{k}^{r} pCw_k^r(A_1,A_2,A_3\ldots A_m)\right]$$

Aber der Inbegriff der zu einer bestimmten Klasse gehörenden Combinationen für alle möglichen Summen stellt diese Combinationsklasse selbst vollständig dar, folglich ist

$$\sum_{k}^{r} pCw_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) = pCw_k (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

also auch

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r\right]^n = \sum_{o}^{k} \binom{n}{k} A_o^{n-k} \; pCw_k (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

wie oben.

Derselbe Schluß führt auch von der Form des polynomischen Lehrsatzes in 70, auf die in 68 dargestellte.

Wir können daher ohne Verletzung der erforderlichen Allgemeinheit, unsere Untersuchungen bloß auf diejenige Polynomialformel beschränken, welche zunächst die nach den Potenzen einer Hauptgröße geordneten Polynome betrifft.

## Potenzirung der Polynome für jeden Exponenten.

### 74.

Wenn ein nach den Potenzen der Hauptgröße x, mit Exponenten, welche eine arithmetische Progression bilden, fortschreitendes Polynom

$$\sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt}$$

auf die nte Potenz erhoben werden soll, wobei n eine ganze positive Zahl ist, so kann diese Potenz, wie so eben gezeigt wurde, mit Hülfe eines der beiden Ausdrücke:

$$\sum_{o}^{r} pCw_n^r (A_o, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) \, x^{nh+rt}$$

und

$$\sum_{o}^{r} \left[ x^{nh+rt} \sum_{o}^{k} \binom{n}{k} A_o^{n-k} \, pCw_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) \right]$$

entwickelt werden.

Es entſteht nun die Frage, ob dieſe beiden Ausdrücke, welche, ſobald man der Zahl n irgend einen ganzen poſitiven Werth beilegt, nichts anderes ſeyn können, als

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt}\right]^n,$$

auch dann noch eine beſtimmte Bedeutung zulaſſen, wenn man ſtatt n eine gebrochene, oder eine negative Zahl ſetzt, und welche Größe ſie in dieſem Falle wohl vorſtellen mögen?

Unterſucht man den Bau beider Ausdrücke, ſo zeigt es ſich, daß der erſtere, nämlich

$$\sum_{o}^{r} p\mathfrak{C}w_n^r(A_o, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)^{nh+rt}$$

aufhört, eine den hier vorauszuſetzenden Begriffen angemeſſene Auslegung zu geſtatten, ſobald man n keine ganze poſitive Zahl ſeyn läßt. Denn da n in dieſem Ausdrucke als Klaſſenexponent der mit den Elementen $A_o, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ zu verrichtenden Combinationen auftritt, folglich die zu jeder Combinationsform zu nehmenden Elemente zählt, ſo iſt dieſe Zahl ihrer Natur nach ganz und poſitiv.

Anders verhält es ſich aber mit dem Ausdrucke

$$\sum_{o}^{r}\left[x^{nh+rt}\sum_{o}^{k}\binom{n}{k}A_o^{n-k}\,p\mathfrak{C}w_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)\right]$$

Den Umſtand ausgenommen, daß er ſich für Werthe von n, die keine ganze poſitive Zahlen ſind, in eine unbegrenzte Folge von Gliedern, oder in eine ſogenannte unendliche Reihe verwandelt, weil dann die in 72 ausgeſprochene Grenze des Endwerthes von r wegfällt, liegt in ſeiner Form nichts, wodurch der Fall, wenn n ganz und poſitiv iſt, von den übrigen Fällen ſich unterſcheiden könnte. Die Zeiger r und k bleiben nämlich für jedes n ganze und poſitive Zahlen, und die Größe

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}$$

befolgt ein Bildungsgesetz, welches die Annahme gebrochener und negativer Werthe für n nicht ausschließt.

Es handelt sich also nur mehr um die Bedeutung dieses Ausdruckes, wenn n aufhört eine ganze positive Zahl zu seyn.

Hier dringt sich ganz natürlich die Vermuthung auf, der erwähnte Ausdruck, welcher für ganze positive Werthe von n die Entwickelung der nten Potenz des Polynoms

$$\sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt}$$

ist, möchte auch in den Fällen, wenn n gebrochene oder negative Werthe erhält, die Entwickelung von

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt}\right]^n \text{ darstellen.}$$

Ist diese Vermuthung gegründet, so muß sich derselbe in der Rechnung wie eine Potenz verhalten, welche n zum Exponenten hat.

Eine Grundeigenschaft der Potenzen besteht darin, daß zwei Potenzen derselben Wurzel mit einander multiplicirt, wieder eine Potenz dieser Wurzel zum Producte geben, deren Exponent die Summe der Exponenten beider Factoren ist.

Wäre also der Ausdruck

$$\sum_{o}^{r}\left[x^{nh+rt}\sum_{o}^{k}\binom{n}{k}A_o^{n-k}\,pCw_k^r\,(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)\right]$$

welchen wir, der Kürze wegen, durch das Symbol $R_n$ bezeichnen wollen, für jedes n der Größe

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt}\right]^n$$

gleich, so müßte, wenn man statt n irgend eine andere Zahl p gesetzt denkt, die Gleichung

$$R_n \cdot R_p = R_{n+p}$$

bestehen, n und p mögen was immer für Zahlen seyn.

Wir werden nun aus der Form des Ausdruckes $R_n$ die

Richtigkeit dieſer Gleichung beweiſen, und dann zeigen, wie aus derſelben geſchloſſen werden kann, daß allgemein für gebrochene und negative Werthe von n

$$R_n = \left[ \sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt} \right]^n \text{ iſt.}$$

Unſer Beweis wird ſich zum Theile auf Eigenſchaften gründen, welche der Größe $\binom{n}{k}$ für jeden Werth von n, ihrem Bildungsgeſetze zufolge, zukommen. Wir werden daher mit der Betrachtung dieſer Eigenſchaften den Anfang machen.

## 75.

Wenn man die Größe

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots [n-(k-2)][n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (k-1) \quad k}$$

in welcher n jeden beliebigen Werth annehmen darf, hingegen k nothwendig eine ganze Zahl anzeigt, durch das Symbol $\binom{n}{k}$ vorſtellt, ſo wird man auf gleiche Weiſe

$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots [n-(k-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)}$ durch $\binom{n}{k-1}$

und $\frac{(n-1)(n-2) \ldots [n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \ldots (k-1)}$ durch $\binom{n-1}{k-1}$

andeuten.

Vergleicht man die Ausdrücke $\binom{n}{k-1}$ und $\binom{n-1}{k-1}$ mit $\binom{n}{k}$, ſo findet man

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-(k-1)}{k}$$

$$\text{und } \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Dieſe Gleichungen, welche, inſofern $\binom{n}{k}$ als die Anzahl der

Combinationen n nicht wiederholbarer Elemente zur kten Klasse betrachtet wurde, bereits in 31 und 33 für ganze positive Werthe von n aus combinatorischen Betrachtungen sich dargeboten haben, gelten also, vermög dem Bildungsgesetze der Größe $\binom{n}{k}$, für alle Werthe von n.

Aus der ersten Gleichung ergibt sich, wenn man zu beiden Theilen derselben $\binom{n}{k-1}$ addirt:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n}{k-1}\left[\frac{n-(k-1)}{k}+1\right]=\frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

Setzt man ferner in der zweiten Gleichung $n+1$ statt n, so erhält man

$$\binom{n+1}{k}=\frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

Es ist also:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$

welche Gleichung mit der in 35 für ganze positive Werthe von n gefundenen übereinstimmt, wenn man dort $n+1$ statt n schreibt.

Die Rechnungen mit den hier betrachteten Ausdrücken führen zuweilen auf die Formen

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{-1}, \binom{n}{-2} \cdots$$

welche aus $\binom{n}{k}$ für $k=0$ und für negative Werthe von k entspringen.

Bezeichnet man die Stellen, welche die Größen

$$\binom{n}{1}=\frac{n}{1}, \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

in der Reihe aller aus der allgemeinen Form

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots k}$$

hervorgehenden Ausdrücke einnehmen, mit den Zeigern

1, 2, 3 ꝛc.

so sind $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{-1}$, $\binom{n}{-2}$ ꝛc. offenbar die Größen, welche den erstgenannten, dem gemeinschaftlichen Bildungsgesetze derselben gemäß, vorangehen, da den der 1ten, 2ten, 3ten . . . Stelle vorangehenden Stellen die Zeiger 0, — 1, — 2, ꝛc. zukommen.

Um über den Werth dieser Symbole zu entscheiden, betrachte man die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-(k-1)}{k}$$

welche die Art und Weise anzeigt, auf welche die Größe $\binom{n}{k}$ aus der ihr nächst vorhergehenden $\binom{n}{k-1}$ entsteht. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-(k-1)} \binom{n}{k}$$

als der Ausdruck des Gesetzes, nach welchem $\binom{n}{k-1}$ aus $\binom{n}{k}$ abzuleiten ist.

Setzt man hier $k = 1$, so findet man:

$$\binom{n}{0} = \frac{1}{n}\binom{n}{1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1} = 1$$

Wird ferner $k = 0$, dann $k = -1$, $k = -2$ angenommen u. s. w., so ergibt sich:

$$\binom{n}{-1} = \frac{0}{n+1}\binom{n}{0} = 0$$

$$\binom{n}{-2} = \frac{-1}{n+2}\binom{n}{-1} = 0$$

$$\binom{n}{-3} = \frac{-2}{n+3}\binom{n}{-2} = 0$$

u. ſ. w.

Wir müſſen jedoch hier bemerken, daß die erſte der drei letzten Gleichungen, wenn $n = -1$ iſt,

$$\binom{-1}{-1} = \frac{0}{0}$$

gibt, welcher Ausdruck unbeſtimmt iſt, da $\frac{0}{0}$ jeder Größe gleich ſeyn kann. Daſſelbe gilt von den folgenden Gleichungen für $n = -2$, $n = -3$ u. ſ. w.

Daß dieſe unbeſtimmt ſcheinenden Fälle von dem allgemeinen Geſetze, welches der Form $\binom{n}{k}$ für negative Werthe von k die Bedeutung Null anweiſet, keine Ausnahme machen, wird mit Hülfe der Gleichung

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

erkannt, welche, als eine Folge des Bildungsgeſetzes der Größe $\binom{n}{k}$, allgemeine Gültigkeit hat.

Aus ihr folgt

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$$

und hieraus für $k = 1, 0, -1, -2, \ldots\ldots$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{1} - \binom{n}{1} = n+1-n = 1$$

$$\binom{n}{-1} = \binom{n+1}{0} - \binom{n}{0} = 1-1 = 0$$

$$\binom{n}{-2} = \binom{n+1}{-1} - \binom{n}{-1} = 0-0 = 0$$

$$\binom{n}{-3} = \binom{n+1}{-2} - \binom{n}{-2} = 0-0 = 0$$

u. ſ. w.

bei welchen Folgerungen der oben geäußerte Zweifel nicht Statt findet.

76.

Aus der so eben für jeden Werth von n erhaltenen Gleichung:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

folgt, wenn man zugleich v statt k schreibt,

$$v\binom{n}{v} = n\binom{n-1}{v-1}$$

und wenn man n mit p, und v mit k—v vertauscht, wobei p was immer für eine Zahl, hingegen k, so wie v, eine ganze positive Zahl anzeigt,

$$(k-v)\binom{p}{k-v} = p\binom{p-1}{k-v-1}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\binom{p}{k-v}$ und die zweite mit $\binom{n}{v}$, so erhält man durch Addition der neuen Gleichungen:

$$k\binom{n}{v}\binom{p}{k-v} = n\binom{n-1}{v-1}\binom{p}{k-v} + p\binom{n}{v}\binom{p-1}{k-v-1}$$

Hieraus folgt nach 57, 2)

$$k\sum_{o,k}^{v}\binom{n}{v}\binom{p}{k-v} = n\sum_{o,k}^{v}\binom{n-1}{v-1}\binom{p}{k-v} + p\sum_{o,k}^{v}\binom{n}{v}\binom{p-1}{k-v-1}$$

Man setze der Kürze wegen:

$$\sum_{o,k}^{v}\binom{n}{v}\binom{p}{k-v} = {}^{n,p}S_k$$

wobei also das Zeichen ${}^{n,p}S_k$ die, nach dem in die Augen fallenden Gesetze, aus n, p und k gebildete Reihe

$$\binom{n}{0}\binom{p}{k}+\binom{n}{1}\binom{p}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{p}{k-2}+\cdots$$
$$\cdots\cdots+\binom{n}{k-1}\binom{p}{1}+\binom{n}{k}\binom{p}{0}$$

vorſtellt, ſo muß man, weil

$$\overset{\nu}{\mathfrak{S}}_{0,k}\binom{n-1}{\nu-1}\binom{p}{k-\nu} \text{ und } \overset{\nu}{\mathfrak{S}}_{0,k}\binom{n}{\nu}\binom{p-1}{k-\nu-1}$$

die Reihen

$$\binom{n-1}{-1}\binom{p}{k}+\binom{n-1}{0}\binom{p}{k-1}+\binom{n-1}{1}\binom{p}{k-2}+\cdots$$
$$\cdots\cdots+\binom{n-1}{k-1}\binom{p}{0}$$

und

$$\binom{n}{0}\binom{p-1}{k-1}+\binom{n}{1}\binom{p-1}{k-2}+\binom{n}{2}\binom{p-1}{k-3}+\cdots$$
$$\cdots\cdots+\binom{n}{k-1}\binom{p-1}{0}+\binom{n}{k}\binom{p-1}{-1}$$

andeuten, welche wegen

$$\binom{n-1}{-1}=0, \quad \binom{p-1}{-1}=0$$

in

$$\binom{n-1}{0}\binom{p}{k-1}+\binom{n-1}{1}\binom{p}{k-2}+\cdots$$
$$\cdots\cdots+\binom{n-1}{k-1}\binom{p}{0}$$

und

$$\binom{n}{0}\binom{p-1}{k-1}+\binom{n}{1}\binom{p-1}{k-2}+\cdots$$
$$\cdots\cdots+\binom{n}{k-1}\binom{p-1}{0}$$

übergehen, die Ausdrücke

$$\overset{\nu}{\mathfrak{S}}_{0,k}\binom{n-1}{\nu-1}\binom{p}{k-\nu} \text{ und } \overset{\nu}{\mathfrak{S}}_{0,k}\binom{n}{\nu}\binom{p-1}{k-\nu-1}$$

durch die Zeichen

$$\overset{n-1,p}{\mathfrak{S}}_{k-1} \quad \text{und} \quad \overset{n,p-1}{\mathfrak{S}}_{k-1}$$

vorſtellen.

Hiedurch bekommt obige Gleichung folgende Gestalt:

$$k\,{}^{n,p}S_k = n\,{}^{n-1,p}S_{k-1} + p\,{}^{n,p-1}S_{k-1}$$

und es ist:

$${}^{n,p}S_k = \frac{n\,{}^{n-1,p}S_{k-1} + p\,{}^{n,p-1}S_{k-1}}{k}$$

für $k = 0$ reducirt sich der Ausdruck ${}^{n,p}S_k$ auf das einzige Glied $\binom{n}{0}\binom{p}{0}$, daher ist

$${}^{n,p}S_0 = 1\,.$$

also auch ${}^{n-1,p}S_0 = 1$, und ${}^{n,p-1}S_0 = 1$.

Setzt man nun in der für ${}^{n,p}S_k$ gefundenen Formel nach und nach $k = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$ so erhält man

$${}^{n,p}S_1 = \frac{n+p}{1} = \binom{n+p}{1}$$

$${}^{n,p}S_2 = \frac{n\binom{n-1+p}{1} + p\binom{n+p-1}{1}}{2}$$

$$= \frac{n+p}{2}\binom{n+p-1}{1} = \binom{n+p}{2}$$

$${}^{n,p}S_3 = \frac{n\binom{n-1+p}{2} + p\binom{n+p-1}{2}}{3}$$

$$= \frac{n+p}{3}\binom{n+p-1}{2} = \binom{n+p}{3}$$

Eine leichte Ueberlegung zeigt, daß der Gang dieser Rechnung für die folgenden Fälle $k = 4, 5, 6 \ldots$ stets derselbe bleiben werde; man ist daher berechtigt zu schließen, daß allgemein

$${}^{n,p}S_k = \binom{n+p}{k}$$ seyn müsse.

Es beſteht alſo für alle Werthe von n und p die Gleichung

$$\sum_{o,k}^{v} \binom{n}{v}\binom{p}{k-v} = \binom{n+p}{k}$$

da in der ganzen Ableitung derſelben keine andern Schlüſſe gemacht wurden, als ſolche, die ſich auf die Betrachtung des Baues der Größen von der Form $\binom{n}{k}$ gründen.

Dieſe Gleichung wurde bereits in 39 aus combinatoriſchen Gründen, aber bloß für ganze poſitive Werthe von n und p abgeleitet. Statt n, p, k ſtehen dort a, b, α.

77.

Setzt man nun die aus n, r, $A_o$ und aus den zu combinirenden Elementen $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ gebildete Größe

$$\sum_{o}^{k} \binom{n}{k} A_o^{n-k}\, p\mathfrak{C}w_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) = \overset{n}{A}_r$$

wobei der über A ſtehende Buchſtabe n kein Exponent iſt, ſondern ſich wie ein bloßes Unterſcheidungszeichen verhält, ferner $\overset{n}{A}_r$ wie man leicht ſieht, für $n=1$ in das Element $A_r$ übergeht, ſo wird, der in 74 gewählten Bezeichnung gemäß:

$$R_n = \sum_{o}^{r} \overset{n}{A}_r\, x^{nh+rt}$$

und auf dieſelbe Weiſe

$$R_p = \sum_{o}^{r} \overset{p}{A}_r\, x^{ph+rt}.$$

Mit Hülfe der in 63 gegebenen Multiplicationsformel erhält man:

$$R_n \cdot R_p = \sum_{o}^{r} \left[ x^{(u+p)h+rt} \sum_{o,r}^{w} \overset{n+p}{A}_w A_{r-w} \right]$$

Es iſt aber

$$\overset{n}{A}_w = \sum_{o}^{k} \binom{n}{k} A_o^{n-k}\, p\mathfrak{C}w_k^w (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

$$\overset{p}{A}_{r-w} = \sum_{o}^{k} \binom{p}{k} A_o^{p-k} \; pCw_k^{r-w}(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

folglich wieder nach der angeführten Multiplicationsformel, in so fern man $A_o$ als die Hauptgröße ansieht:

$$\overset{n}{A}_w \cdot \overset{p}{A}_{r-w} = \sum_{o}^{k} \left[ A_o^{n+p-k} \sum_{o,k}^{v} \binom{n}{v} \binom{p}{k-v} \times \right.$$

$$\left. \times \; pCw_v^w(A_1, A_2 .. A_m) pCw_{k-v}^{r-w}(A_1, A_2 .. A_m) \right]$$

und, mit Rücksicht auf 58

$$\sum_{o,r}^{w} \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w} = \sum_{o}^{k} \left\{ A_o^{n+p-k} \sum_{o,k}^{v} \left[ \binom{n}{v} \binom{p}{k-v} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \sum_{o,r}^{w} pCw_v^w(A_1, A_2 .. A_m) \; pCw_{k-v}^{r-w}(A_1, A_2 .. A_m) \right] \right\}$$

Das combinatorische Aggregat:

$$\sum_{o,r}^{w} pCw_v^w \; (A_1, A_2 \ldots A_m) \; pCw_{k-v}^{r-w} \; (A_1, A_2 \ldots A_m)$$

wird durch folgende Betrachtungen auf einen einfachern Ausdruck gebracht:

Wenn man das Aggregat der Combinationen mit Wiederholungen gegebener Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ zur Klasse v und zur Summe w mit dem Aggregate der Combinationen mit Wiederholungen derselben Elemente zur Klasse $k - v$ und zur Summe $r - w$ multiplicirt, so entsteht ohne Zweifel ein Aggregat einiger Combinationen mit Wiederholungen für diese Elemente, zur Klasse k und zur Summe r.

Gibt man aber der Zahl w nach und nach alle Werthe, für welche obige Combinationsformen Realität haben, nämlich (weil der Summenexponent, wenn man es mit den Zeigern 1, 2, 3 . . . zu thun hat, nie kleiner seyn kann, als der Klassenexponent) alle ganzen positiven innerhalb den Grenzen v und $r - (k - v)$ liegenden Werthe, welche um so mehr auch

zwiſchen den an dem Summenzeichen angedeuteten Grenzen o und r enthalten ſind; ſo iſt keine zur Klaſſe k und zur Summe r gehörende Combinationsform mit Wiederholungen für die Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ denkbar, welche nicht durch obige Multiplication erzeugt würde. Denn man kann von jeder beliebigen Combinationsform der Klaſſe k und Summe r, eine aus v Elementen beſtehende und irgend eine Zeigerſumme w darſtellende Complexion, als Factor abſondern, ſo daß eine k — v ſtellige Complexion zurückbleibt, deren Zeigerſumme mit der vorigen w zuſammen r ausmacht. Bei der vorausgeſetzten Vieldeutigkeit von w müſſen ſich dieſe beiden Complexionen unter den in

$pCw_v^w (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$ und $pCw_{k-v}^{r-w}(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$

enthaltenen Combinationsformen befinden, und bei der Multiplication dieſer Größen die in der Frage ſtehende Combinationsform der Klaſſe k und Summe r hervorbringen.

Die erwähnte Zerlegung einer zur Klaſſe k und Summe r gehörenden Combination iſt aber auf ſo viele Arten möglich, als ſich von derſelben v andere Elemente abſondern laſſen; es kann alſo eine ſolche Combination bei der wirklichen Entwickelung des obigen combinatoriſchen Aggregates auf mehrere Arten entſtehen: überdieß führt jede dort vorkommende Combination ihre Permutationszahl als Factor bei ſich; daher erſcheinen die gehörig zuſammengezogenen, ſämmtlich der Klaſſe k und Summe r angehörenden, Complexionen, welche durch die Entwickelung des combinatoriſchen Aggregates:

$$\sum_{o,r}^{w} pCw_v^w (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) pCw_{k-v}^{r-w}(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

herbeigeführt werden, mit Coefficienten, deren Beſchaffenheit wir nun näher in das Auge faſſen wollen.

Iſt $A_a^\alpha A_b^\beta A_c^\gamma \ldots$

irgend eine Combinationsform der Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ mit Wiederholungen zur Klaſſe k und zur Summe r, und man ſetzt

$$a = a_1 + a_2$$
$$b = b_1 + b_2$$
$$c = c_1 + c_2$$
u. ſ. w.

ferner $a_1 + b_1 + c_1 + \ldots = v$
$a_2 + b_2 + c_2 + \ldots = k - v$

wodurch die Bedingung, daß die obengenannte Combinationsform zur Klaſſe k gehört, oder daß

$$a + b + c + \ldots = k$$

iſt, erfüllt wird, ſo entſteht

$$A_a^a A_b^b A_c^c \ldots$$

durch die Multiplication der Complexionen

$$A_a^{a_1} A_b^{b_1} A_c^{c_1} \ldots \text{ und } A_a^{a_2} A_b^{b_2} A_c^{c_2} \ldots$$

auf ſo viel verſchiedene Arten, als es möglich iſt, den Exponenten $a_1, b_1, c_1 \ldots a_2, b_2, c_2 \ldots$ mit Rückſicht auf obige Gleichungen die Werthe

$$0, 1, 2, 3 \ldots$$

beizulegen.

Da nun $A_a^{a_1} A_b^{b_1} A_c^{c_1}$ die Permutationszahl $\frac{v!}{a_1!b_1!c_1!\,\&c.}$

und $A_a^{a_2} A_b^{b_2} A_c^{c_2} \ldots$ die Permutationszahl $\frac{(k-v)!}{a_2!b_2!c_2!\,\&c.}$

als Factor bei ſich führt, ſo bekömmt die Combinationsform

$$A_a^a A_b^b A_c^c \ldots$$

die Summe aller Reſultate zum Coefficienten, welche aus dem Producte

$$\frac{v!}{a_1!b_1!c_1!\,\&c.} \cdot \frac{(k-v)!}{a_2!b_2!c_2!\,\&c.}$$

durch obige Werthe von $a_1, b_1, c_1 \ldots a_2, b_2, c_2 \ldots$ hervorgehen.

Allein die Summe dieser Resultate ist vermöge 30)

$$= \frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{&c.}}$$

welche Zahl die Versetzungszahl der Combinationsform

$$A_a^a A_b^b A_c^c \ldots$$

angibt; es erhält also jede durch die Entwickelung des combinatorischen Aggregates

$$\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} pCw_v^w(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)\, pCw_{k-v}^{r-w}(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

entstehende Complexion ihre Versetzungszahl zum Coefficienten.

Man ist also berechtigt

$$\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} pCw_v^w(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)\, pCw_{k-v}^{r-w}(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

$$= pCw_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

zu setzen, und daher hat man:

$$\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} A_w^n A_{r-w}^p =$$

$$= \overset{k}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} \left\{ A_o^{n+p-k} \overset{v}{\underset{o,k}{\mathfrak{S}}} \left[ \binom{n}{v} \binom{p}{k-v} pCw_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) \right] \right\}$$

$$= \overset{k}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} \left\{ A_o^{n+p-k}\, pCw_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) \overset{v}{\underset{o,k}{\mathfrak{S}}} \binom{n}{v} \binom{p}{k-v} \right\}$$

wenn man nämlich nach 55, 3) die von v unabhängige Größe

$$pCw_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

vor das sich auf den Zeiger v beziehende Summenzeichen setzt.

Es ist aber, der in 76 vollbrachten Reduction gemäß:

$$\overset{v}{\underset{o,k}{\mathfrak{S}}} \binom{n}{v} \binom{p}{k-v} = \binom{n+p}{k}$$

daher $\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} A_w \, A_{r-w}^{p} =$

$$= \overset{k}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} \left[ \binom{n+p}{k} A_o^{n+p-k} \; {}_p\mathfrak{C}w_k^r \; (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) \right]$$

$$= A_r^{n+p}$$

wenn man bei der einmal angenommenen Bezeichnung beharrt.

Hieraus folgt ferner

$$R_n \, . \, R_p = \overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} A_r^{n+p} \, x^{(n+p)h+rt}$$

welcher letztere Ausdruck, sobald man

$$\overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} A_r^{n} \, x^{nh+rt}$$

durch $R_n$ vorstellt, nichts anders seyn kann, als $R_{n+p}$; daher ist die Richtigkeit der Gleichung

$$R_n \, . \, R_p = R_{n+p}$$

für alle Werthe von n und p bewiesen.

78.

Aus der Gleichung

$$R_n \, R_p = R_{n+p}$$

kann nun die Allgemeinheit der Polynomialformel leicht abgeleitet werden.

Es ist, dieser Gleichung gemäß,

$$R_n \, R_p \, R_q = R_{n+p} \, R_q$$

und wenn man in derselben Gleichung $n + p$ statt n, und q statt p setzt:

$$R_{n+p} \, R_q = R_{n+p+q}$$

also

$$R_n \, R_p \, R_q = R_{n+p+q}$$

hieraus folgt ferner

$$R_n \, R_p \, R_q \, R_u = R_{n+p+q} \, R_u$$

Vermöge der Gleichung $R_n R_p = R_{n+p}$ iſt aber, wenn man n mit $n+p+q$, und p mit u verwechſelt,

$$R_{n+p+q} \cdot R_u = R_{n+p+q+u}$$

alſo auch

$$R_n R_p R_q R_u = R_{n+p+q+u}$$

So kann man fortſchließen, und für jede Anzahl der Factoren und für alle möglichen Werthe von n, p, q, u ꝛc. den Satz

$$R_n R_p R_q R_u \ldots = R_{n+p+q+u+\ldots}$$

aufſtellen.

Man laſſe nun $n = p = q = u = \ldots$ ꝛc. und die Anzahl der Factoren $= g$ ſeyn, ſo ergibt ſich

$$(R_n)^g = R_{gn}$$

Hier iſt n eines jeden Werthes fähig, g aber nothwendig eine ganze poſitive Zahl.

Es ſey $gn = f$ oder $n = \frac{f}{g}$

ſo folgt $(R_{\frac{f}{g}})^g = R_f$

und, wenn man beiderſeits die gte Wurzel auszieht:

$$R_{\frac{f}{g}} = (R_f)^{\frac{1}{g}}$$

wobei man der Größe f jeden Werth beilegen kann.

Es ſey nun f eine ganze poſitive Zahl, ſo iſt, dem in 71 Bewieſenen und der in 74 angenommenen Bezeichnung gemäß:

$$R_f = \left[\sum_{o,m}^{r} A_r x^{h+rt}\right]^f$$

Subſtituirt man dieſen Ausdruck in der ſo eben gefundenen Gleichung, ſo erhält man:

$$R_{\frac{f}{g}} = \left[\sum_{o,m}^{r} A_r x^{h+rt}\right]^{\frac{f}{g}}$$

Dieſe Gleichung zeigt, daß der Ausdruck

$$R_n = \sum_{o}^{r} \left[ x^{nh+rt} \sum_{o}^{k} \binom{n}{k} A_o^{n-k} \; pCw_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) \right]$$

auch wenn man daſelbſt der Zahl n einen gebrochenen poſitiven rationalen Werth beilegt, die Entwickelung von

$$\left[ \sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt} \right]^n$$

darſtellt, wodurch der polynomiſche Lehrſatz für rationale gebrochene poſitive Exponenten bewieſen iſt.

Man nehme nun in der Gleichung

$$R_n \cdot R_p = R_{n+p}$$

$p = -n$ an, ſo ergibt ſich

$$R_n \cdot R_{-n} = R_{n-n} = R_o$$

Es iſt aber

$$R_o = \sum_{o}^{r} \left[ x^{rt} \sum_{o}^{k} \binom{o}{k} A_o^{-k} \; pCw_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) \right]$$

welcher Ausdruck, da $\binom{o}{k}$ nur für $k = o$ in die Einheit, ſonſt aber ſtets in o übergeht, ſich auf das einzige Glied $x^o$ reducirt, alſo

$$R_o = 1 \text{ gibt, woraus}$$
$$R_n \cdot R_{-n} = 1$$

und $R_{-n} = \frac{1}{R_n} = (R_n)^{-1}$ folgt.

Erhält n einen poſitiven ganzen oder gebrochenen Werth, ſo iſt, wie bereits gezeigt wurde,

$$R_n = \left[ \sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt} \right]^n$$

folglich

$$R_{-n} = \left[ \sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt} \right]^{-n}$$

Es gilt alſo die Polynomialformel

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n = \sum_{o}^{r}\left[x^{nh+rt}\sum_{o}^{k}\binom{n}{k}A_o^{n-k}\, pCw_k^r(A_1, A_2 \ldots A_m)\right]$$

auch für rationale negative, ganze und gebrochene Werthe des Exponenten n.

79.

Die Polynomialformel läßt sich durch die gewöhnliche Schlußform, nach welcher man vom Commensurablen zum Incommensurablen überzugehen pflegt, auch auf incommensurable Exponenten ausdehnen.

Denn für jeden incommensurablen Werth von n läßt sich eine commensurable Zahl v finden, so daß sowohl die Differenz

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n - \left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^v$$

als auch $R_n - R_v$

ohne Rücksicht auf das Zeichen, das ist, bloß dem numerischen Werthe nach, kleiner wird, als jede gegebene noch so kleine Größe.

Wäre nun $R_n$ nicht $= \left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n$

sondern fände zwischen beiden Größen ein Unterschied D Statt, wobei D eine bestimmte Größe anzeigt, so daß

$$R_n = \left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n \pm D$$

wäre, so hätte man, weil nach 78 für das commensurable v

$$R_v = \left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^v$$

ist, durch Subtraction beider Gleichungen

$$R_n - R_v = \left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n - \left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^v \pm D$$

oder

$$D = \pm\left\{R_n - R_v - \left\{\left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n - \left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^v\right\}\right\}$$

welche Gleichung der Annahme, daß die beiden innerhalb den Klammern ſtehenden Differenzen kleiner gemacht werden können, als jede gegebene noch ſo kleine Größe, widerſpricht. Es darf nämlich weder die Summe noch der Unterſchied zweier Größen, deren jede ſo klein werden kann, als man will, dem numeriſchen Werthe nach, einer beſtimmten Größe, wie D iſt, gleich geſetzt werden.

Es iſt alſo $D = o$ oder

$$R_n = \left[ \sum_{o,m}^{r} A_r \, x^{h+rt} \right]^n$$

was zu beweiſen war.

## 80.

Wenn man den Coefficienten von $x^{nh+rt}$ in der Entwickelung der Potenz des Polynoms

$$\sum_{o,m}^{t} A_r \, x^{h+rt}$$

für den Exponenten n, nämlich die Größe

$$\sum_{o}^{k} \binom{n}{k} A_o^{n-k} \, pCw_k^r \, (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

welche wir den zum Exponenten n und zum Zeiger r gehörenden Polynomial-Coefficienten nennen wollen, wie es bereits in 77 geſchehen iſt, durch $\overset{n}{A}_r$ andeutet, ſo beſteht, dem daſelbſt geführten Beweiſe zufolge, die Gleichung:

$$\sum_{o,r}^{w} \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w} = \overset{n+p}{A}_r$$

Dieſe höchſt merkwürdige Relation zwiſchen den Polynomial-Coefficienten zweier Exponenten n, p veranlaßt uns noch andere, in der Folge brauchbare Relationen derſelben aufzuſuchen.

Wir wollen gegenwärtig die Summe

$$\sum_{o,r}^{w} w \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w} \text{ oder vielmehr } \sum_{1,r}^{w} w \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w}$$

zu beſtimmen ſuchen.

Es ist

$$\overset{n}{A}_w = \sum_{0}^{k} \binom{n}{k} A_0^{n-k} \, pCw_k^w \, (A_1, A_2 \ldots A_m)$$

oder weil hier $w > 0$ vorausgesetzt wird, folglich der niedrigste Werth von $k$ der Einheit gleich kömmt,

$$\overset{n}{A}_w = \sum_{1}^{k} \binom{n}{k} A_0^{n-k} \, pCw_k^w \, (A_1, A_2 \ldots A_m)$$

ferner hat man

$$\overset{p}{A}_{r-w} = \sum_{0}^{k} \binom{p}{k} A_0^{p-k} \, pCw_k^{r-w} \, (A_1, A_2 \ldots A_m)$$

Hieraus findet man durch wirkliche, der in 64 gegebenen Formel gemäß verrichtete, Multiplication der Polynomial-Coefficienten $\overset{n}{A}_w$ und $\overset{p}{A}_{p-w}$ und durch die rücksichtlich des Zeigers $w$ vollbrachte Summirung des Productes $w \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w}$, dem in 77 eingeschlagenen Wege folgend:

$$\sum_{1,r}^{w} w \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w} =$$

$$= \sum_{1}^{k} \left\{ A_0^{n+p-k} \sum_{1,k}^{v} \left[ \binom{n}{v} \binom{p}{k-v} \sum_{1,r}^{w} w \, pCw_v^w \, . \, pCw_{k-v}^{r-w} \right] \right\}$$

wobei die Combinationszeichen $Cw_v^w$, $Cw_{k-v}^{r-w}$ sich auf die Elemente: $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ beziehen, deren Andeutung wir hier, der Kürze wegen, weglassen.

Es ist nun das combinatorische Aggregat

$$\sum_{1,r}^{w} w \, pCw_v^w \, . \, pCw_{k-v}^{r-w}$$

auf einen einfachern Ausdruck zu reduciren.

Auch hier schließen wir, wie in 77, daß durch die Multiplication von $Cw_v^w$ mit $Cw_{k-v}^{r-w}$, bei der am Summenzeichen angegebenen Ausdehnung der Werthe von $w$, alle denkbaren Combinationen mit Wiederholungen zur Klasse $k$ und Summe $r$

für die Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ entſtehen, ſo daß nur der Coefficient jeder einzelnen Complexion, der theils durch die als Factor vorhandene Permutationszahl, theils durch die Vielfältigkeit ihres Entſtehens herbeigeführt wird, zu beſtimmen iſt.

Es ſey $A_a^a A_b^b A_c^c \ldots\ldots$

irgend eine aus den Elementen $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ gebildete Combinationsform zur Klaſſe k und zur Summe r, ſo iſt

$$a + b + c + \ldots = k$$
$$aa + bb + cc + \ldots = r$$

Setzt man $a = a_1 + a_2$
$b = b_1 + b_2$
$c = c_1 + c_2$
u. ſ. w.

ferner $a_1 + b_1 + c_1 + \ldots = v$
und $a_2 + b_2 + c_2 + \ldots = k - v$

ſo entſteht die Complexion $A_a^a A_b^b A_c^c \ldots$ durch die Multiplication von

$$A_a^{a_1} A_b^{b_1} A_c^{c_1} \ldots \text{ und } A_a^{a_2} A_b^{b_2} A_c^{c_2} \ldots$$

auf ſo viel verſchiedene Arten, als die obigen Gleichungen geſtatten, den Exponenten $a_1, b_1, c_1 \ldots a_2, b_2, c_2 \ldots$ ganze poſitive Werthe, die Nulle mit eingeſchloſſen, anzuweiſen.

Der Coefficient der Complexion $A_a^a A_b^b A_c^c \ldots$ wird in jedem einzelnen dieſer Fälle durch das Product der Verſetzungszahlen beider Factoren mit der Zeigerſumme des einen, nämlich durch

$$\text{w.} \frac{v!}{a_1! b_1! c_1! \text{ ꝛc.}} \cdot \frac{(k-v)!}{a_2! b_2! c_2! \text{ ꝛc.}} =$$

$$= (aa_1 + bb_1 + cc_1 \ldots \text{ ꝛc.}) \frac{v!}{a_1! b_1! c_1! \text{ ꝛc.}} \cdot \frac{(k-v)!}{a_2! b_2! c_2! \text{ ꝛc.}}$$

angegeben. Es iſt daher der Coefficient von

$$A_a^a\, A_b^b\, A_c^c \ldots .$$

am Ende der Rechnung gleich dem combinatorischen Aggregate

$$\mathfrak{S}\,(a a_1 + b b_1 + c c_1 + \text{ꝛc.})\ \frac{v!}{a_1! b_1! c_1! \text{ꝛc.}} \cdot \frac{(k-v)!}{a_2! b_2! c_2! \text{ꝛc.}}$$

$$[a_1, b_1, c_1 \ldots a_2, b_2, c_2 \ldots]$$

$$\begin{array}{l|l} a_1 + a_2 = a & \\ b_1 + b_2 = b & a_1 + b_1 + c_1 + \ldots = v \\ c_1 + c_2 = c & a_2 + b_2 + c_2 + \ldots = k-v \\ \text{ꝛc.} & \end{array}$$

Es ist nach 55 verstattet, hinter dem Summenzeichen mit dem zusammengesetzten Factor

$$a a_1 + b b_1 + c c_1 + \text{ꝛc.}$$

wirklich zu multipliciren, für jedes einzelne Partialproduct das den angeführten Bedingungsgleichungen angemessene combinatorische Aggregat zu nehmen, und alle so erhaltenen Aggregate zu addiren.

Das aus dem ersten Partialproduct entspringende combinatorische Aggregat ist

$$\mathfrak{S}\, a a_1 \cdot \frac{v!}{a_1! b_1! c_1! \text{ꝛc.}} \cdot \frac{(k-v)!}{a_2! b_2! c_2! \text{ꝛc.}}$$

Es kann, weil $a_1! = (a_1 - 1)!\, a_1$

$v! = (v-1)!\, v$ ist,

ferner $a$, $v$ in dem Verzeichnisse der veränderlichen Größen nicht vorkommen, also vor das Summenzeichen gesetzt werden dürfen, wenn man zugleich $\alpha$ statt $a_1 - 1$ schreibt, auch so vorgestellt werden:

$$a v\, \mathfrak{S}\, \frac{(v-1)!}{\alpha! b_1! c_1! \text{ꝛc.}} \cdot \frac{(k-v)!}{a_2! b_2! c_2! \text{ꝛc.}}$$

$$[\alpha, b_1, c_1 \ldots a_2, b_2, c_2 \ldots]$$

$$\begin{array}{l|l} \alpha + a_2 = a - 1 & \\ b_1 + b_2 = b & \alpha + b_1 + c_1 + \ldots = v-1 \\ c_1 + c_2 = c & a_2 + b_2 + c_2 + \ldots = k-v \\ \text{u. s. w.} & \end{array}$$

welches combinatoriſche Aggregat wegen 39 in

$$a\,v \cdot \frac{(k-1)!}{(a-1)!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}} = \frac{a\,a\,v}{k} \cdot \frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}}$$

übergeht.

Auf dieſelbe Weiſe ergibt ſich

$$\frac{b\,b\,v}{k} \cdot \frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}}$$

als Totalwerth des durch das zweite Partialproduct, ferner

$$\frac{c\,c\,v}{k} \cdot \frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}}$$

als Totalwerth des durch das dritte Partialproduct beſtimmten Aggregates u. ſ. w.

Alle dieſe Aggregate zuſammengenommen betragen:

$$\frac{(a\,a + b\,b + c\,c + \ldots)\,v}{k} \cdot \frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}} =$$

$$= \frac{r\,v}{k} \cdot \frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}}$$

und dieß iſt der am Ende der Rechnung erſcheinende Coefficient

$$\text{von } A_a^a\, A_b^b\, A_c^c \ldots\ldots$$

Nun iſt $\frac{k!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}}$ die Permutationszahl der Complexion $A_a^a A_b^b A_c^c \ldots\ldots$ und die Zahlen r, k, v ändern ſich nicht, indem man von einer der hier entſtehenden Complexionen zur andern fortſchreitet; man hat daher die Gleichung

$$\sum_{1,r}^{w} w\,{}_p\mathfrak{C}w_v^w \cdot {}_p\mathfrak{C}w_{k-v}^{r-w} = \frac{r\,v}{k}\,{}_p\mathfrak{C}w_k^r$$

Hiedurch wird:

$$\sum_{1,r}^{w} w\,A_w^n\,A_{r-w}^p = \sum_{1}^{k}\left[A_o^{n+p-k} \sum_{1,k}^{v}\binom{n}{v}\binom{p}{k-v}\frac{r\,v}{k}\,{}_p\mathfrak{C}w_k^r\right]$$

$$= r\sum_{1}^{k}\left[\frac{1}{k}A_o^{n+p-k}\,{}_p\mathfrak{C}w_k^r \sum_{1,k}^{v} v\binom{n}{v}\binom{p}{k-v}\right]$$

Wegen $\binom{n}{\nu} = \frac{n}{\nu}\binom{n-1}{\nu-1}$ ist

$$\nu\binom{n}{\nu} = n\binom{n-1}{\nu-1}$$

also $\sum_{1,k}^{\nu} \nu\binom{n}{\nu}\binom{p}{k-\nu} = n\sum_{1,k}^{\nu}\binom{n-1}{\nu-1}\binom{p}{k-\nu}$

Aber es ist

$$\sum_{1,k}^{\nu}\binom{n-1}{\nu-1}\binom{p}{k-\nu} = \sum_{0,k-1}^{\nu}\binom{n-1}{\nu}\binom{p}{k-1-\nu} \quad (57,\ 1)$$

$$= \binom{n+p-1}{k-1} \quad (76)$$

folglich

$$\sum_{1,k}^{\nu}\nu\binom{n}{\nu}\binom{p}{k-\nu} = n\binom{n+p-1}{k-1} = \frac{nk}{n+p}\binom{n+p}{k}$$

Man hat daher

$$\sum_{1,r}^{w} w\overset{n}{A}_w\overset{p}{A}_{r-w} = \frac{rn}{n+p}\sum_{1}^{k}\binom{n+p}{k}A_o^{n+p-k}\ pCw_k^r$$

das heißt:

$$\sum_{1,r}^{w} w\overset{n}{A}_w\overset{p}{A}_{r-w} = \frac{rn}{n+p}\overset{n+p}{A}_r$$

## 81.

In dem besondern Falle, wenn $n+p=o$, oder $p=-n$ ist, erhält $\overset{n+p}{A}_r = \overset{o}{A}_r$ für $r=o$ den Werth 1, für $r>o$ den Werth o, und die hier gefundene Formel gibt

$$\sum_{1,r}^{w} w\overset{n}{A}_w\overset{-n}{A}_{r-w} = \frac{o}{o}$$

Um diesen unbestimmten Ausdruck zu vermeiden, unterlasse man statt $n\binom{n+p-1}{k-1}$, wie es in der obigen Rechnung geschehen ist, $\frac{nk}{n+p}\binom{n+p}{k}$ zu setzen, denn gerade hiedurch wurde in den Zähler und Nenner des Resultates der Factor

$n+p=o$ eingeführt. Man hat daher, wenn man den Gang der Rechnung in 8o mit Beachtung dieſer Bemerkung verfolgt:

$$\sum_{1,k}^{v} v \binom{n}{v}\binom{p}{k-v} = n\binom{n+p-1}{k-1}$$

und für $n+p=o$

$$\sum_{1,k}^{v} v \binom{n}{v}\binom{-n}{k-v} = n\binom{-1}{k-1}$$

Es iſt aber der Bedeutung des Zeichens $\binom{-1}{k-1}$ gemäß:

$$\binom{-1}{k-1} = \frac{-1(-1-1)(-1-2)\ldots[-1-(k-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)}$$

$$= (-1)^{k-1}$$

folglich $\sum_{1,k}^{v} v\binom{n}{v}\binom{-n}{k-v} = n(-1)^{k-1}$

und

$$\sum_{1,r}^{w} w \overset{n}{A}_w \overset{-n}{A}_{r-w} = rn \sum_{1}^{k} \frac{1}{k}(-1)^{k-1} A_o^{-k}\, pCw_k^r (A_1, A_2 \ldots A_m)$$

$$= -rn \sum_{1}^{k} \frac{1}{k}(-1)^{k} A_o^{-k}\, pCw_k^r (A_1, A_2 \ldots A_m)$$

Es wird $pCw_k (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$ mit

$$(-1)^k A_o^{-k} = \left[-\frac{1}{A_o}\right]^k$$

multiplicirt, wenn man jedes der k Elemente in jeder einzelnen Complexion mit $-\frac{1}{A_o}$ multiplicirt, daher iſt offenbar:

$$(-1)^k A_o^{-k}\, pCw_k^r (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) =$$

$$= pCw_k^r \left[-\frac{A_1}{A_o}, -\frac{A_2}{A_o}, -\frac{A_3}{A_o} \ldots . -\frac{A_m}{A_o}\right]$$

folglich $\overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}} w \overset{n}{A}_w \overset{-n}{A}_{r-w} =$

$$= -rn \overset{k}{\underset{1}{\mathfrak{S}}} \frac{1}{k} p\mathfrak{C}w_k^r \left[ -\frac{A_1}{A_0}, -\frac{A_2}{A_0}, \ldots -\frac{A_m}{A_0} \right]$$

82.

Da $\overset{w}{\underset{0,r}{\mathfrak{S}}} \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w} = \overset{n+p}{A}_r$

und $\overset{w}{\underset{0,r}{\mathfrak{S}}} w \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w} = \overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}} w \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w} = \frac{rn}{n+p} \overset{n+p}{A}_r$ ist,

so findet man, wenn man die erste dieser Gleichungen mit einer von w gar nicht abhängenden Zahl $\lambda$, und die zweite mit einer eben solchen Zahl $\mu$ multiplicirt, und dann beide Gleichungen addirt:

$$\overset{w}{\underset{0,r}{\mathfrak{S}}} (\lambda + w\mu) \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w} = \left[ \lambda + \frac{rn}{n+p} \mu \right] \overset{n+p}{A}_r$$

$$= \frac{(n+p)\lambda + rn\mu}{n+p} \overset{n+p}{A}_r$$

In dem besondern Falle, wenn $n+p=o$ ist, und $r>o$ hat man:

$$\overset{w}{\underset{0,r}{\mathfrak{S}}} (\lambda + w\mu) \overset{n}{A}_w \overset{-n}{A}_{r-w} =$$

$$= -rn\mu \overset{k}{\underset{1}{\mathfrak{S}}} \frac{1}{k} p\mathfrak{C}w_k^r \left[ -\frac{A_1}{A_0}, -\frac{A_2}{A_0} \ldots -\frac{A_m}{A_0} \right]$$

für $r=o$ hingegen ist der Werth dieser Formel $= \lambda \overset{n}{A}_0 \overset{-n}{A}_0 = \lambda$.

Setzt man in der allgemeinen Formel

$$\mu = n+p, \quad \lambda = -rn$$

so wird $(n+p)\lambda + rn\mu = o$

daher $\overset{w}{\underset{0,r}{\mathfrak{S}}} [w(n+p) - rn] \overset{n}{A}_w \overset{p}{A}_{r-w} = o$

und wenn man das erste, für $w = o$ sich ergebende Glied dieses Ausdruckes von der Summe der übrigen Glieder absondert:

$$-rn\,\overset{n}{A}_o\,\overset{p}{A}_r + \overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}\,[w(n+p)-rn]\,\overset{n}{A}_w\,\overset{p}{A}_{r-w} = o$$

woraus

$$\overset{p}{A}_r = \frac{1}{r\,n\,\overset{n}{A}_o}\,\overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}\,[w(n+p)-rn]\,\overset{n}{A}_w\,\overset{p}{A}_{r-w}$$

erhalten wird.

Diese Formel zeigt, wie der zu dem Zeiger r gehörende Polynomial-Coefficient für den Exponenten p berechnet werden kann, wenn die ihm vorhergehenden Coefficienten, wie auch die $r+1$ ersten Coefficienten einer Potenz des nämlichen Polynoms für irgend einen andern Exponenten n gegeben sind.

Am einfachsten ist es $n = 1$ anzunehmen, in welchem Falle die zu Hülfe genommenen $r+1$ Polynomial-Coefficienten in die Coefficienten des Polynoms

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}}\,A_r\,x^{h+rt}$$

selbst übergehen, d. h. $\overset{1}{A}_r = A_r$ wird, und diese Formel sich in

$$\overset{p}{A}_r = \frac{1}{r\,\overset{1}{A}_o}\,\overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}\,[wp-(r-w)]\,\overset{1}{A}_w\,\overset{p}{A}_{r-w}$$

verwandelt, wodurch die Coefficienten jeder Potenz eines Polynoms stufenweise, d. i. mit Hülfe einer Recursion auf die bereits gefundenen, abgeleitet werden können, also der polynomische Lehrsatz unter einer neuen, nämlich unter der recurrirenden, Form dargestellt erscheint.

Offenbar ist $\overset{p}{A}_o = A_o^p$; setzt man nun in letzterer Formel $r = 1, 2, 3, 4$ ꝛc., so findet man:

$$\overset{p}{A}_1 = \frac{p\,A\,\overset{p}{A}_0}{A_0}$$

$$\overset{p}{A}_2 = \frac{(p-1)A_1\overset{p}{A}_1 + 2pA_2\overset{p}{A}_0}{2A_0}$$

$$\overset{p}{A}_3 = \frac{(p-2)A_1\overset{p}{A}_2 + (2p-1)A_2\overset{p}{A}_1 + 3pA_3\overset{p}{A}_0}{3A_0}$$

$$\overset{p}{A}_4 = \frac{(p-3)A_1\overset{p}{A}_3 + (2p-2)A_2\overset{p}{A}_2 + (3p-1)A_3\overset{p}{A}_1 + 4pA_4\overset{p}{A}_0}{4A_0}$$

u. ſ. w.

## 83.

Auf die vorhergehenden Sätze geſtützt, kann man ſich zu noch allgemeinern Relationen zwiſchen den Polynomial-Coefficienten erheben.

Bis jetzt waren die Potenzexponenten der Polynomial-Coefficienten in allen Gliedern der ſummirten Reihe dieſelben; es laſſen ſich aber, wie **Rothe** in ſeiner vortrefflichen Diſſertation de serierum reversione gezeigt hat, auch regelmäßige Folgen von Producten ſolcher Polynomial-Coefficienten ſummiren, deren Potenzexponenten von einem Gliede zum andern in arithmetiſcher Progreſſion, jedoch ſo fortſchreiten, daß ihre Summe unveränderlich iſt.

Wir wollen hier den Werth der Summe

$$\sum_{\sigma,r}^{w} \frac{\lambda + w\mu}{(n+wd)(p-wd)} \overset{n+wd}{A_w}\,\overset{p-wd}{A_{r-w}}$$

welchen wir der Kürze wegen $= S_r$ ſetzen, aufſuchen.

Wir erreichen unſern Zweck, wenn wir im Stande ſind, eine Recurſionsformel zu finden, welche $S_r$ durch $S_{r-1}$, $S_{r-2}$ u. ſ. w. ausdrückt. Denn da aus der Form der zu beſtimmenden Summe leicht erkannt wird, daß

und wenn man das erste, für $w = o$ sich ergebende Glied dieses Ausdruckes von der Summe der übrigen Glieder absondert:

$$-rn\overset{n}{A}_o\overset{p}{A}_r + \overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}[w(n+p)-rn]\overset{n}{A}_w\overset{p}{A}_{r-w} = o$$

woraus

$$\overset{p}{A}_r = \frac{1}{rn\overset{n}{A}_o}\overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}[w(n+p)-rn]\overset{n}{A}_w\overset{p}{A}_{r-w}$$

erhalten wird.

Diese Formel zeigt, wie der zu dem Zeiger r gehörende Polynomial-Coefficient für den Exponenten p berechnet werden kann, wenn die ihm vorhergehenden Coefficienten, wie auch die $r+1$ ersten Coefficienten einer Potenz des nämlichen Polynoms für irgend einen andern Exponenten n gegeben sind.

Am einfachsten ist es $n = 1$ anzunehmen, in welchem Falle die zu Hülfe genommenen $r+1$ Polynomial-Coefficienten in die Coefficienten des Polynoms

$$\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r\, x^{h+rt}$$

selbst übergehen, d. h. $\overset{1}{A}_r = A_r$ wird, und diese Formel sich in

$$\overset{p}{A}_r = \frac{1}{r\overset{1}{A}_o}\overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}[wp-(r-w)]\overset{1}{A}_w\overset{p}{A}_{r-w}$$

verwandelt, wodurch die Coefficienten jeder Potenz eines Polynoms stufenweise, d. i. mit Hülfe einer Recursion auf die bereits gefundenen, abgeleitet werden können, also der polynomische Lehrsatz unter einer neuen, nämlich unter der recurrirenden, Form dargestellt erscheint.

Offenbar ist $\overset{p}{A}_o = A_o^p$; setzt man nun in letzterer Formel $r = 1, 2, 3, 4$ ꝛc., so findet man:

daher, wenn man in dieſer Gleichung

$$\lambda, \quad \mu, \quad w, \quad n, \quad p, \quad r$$

mit

$$Y + wZ, \quad Z, \quad k, \quad p - wd, \quad z, \quad r - w$$

verwechſelt:

$$\sum_{o,r-w}^{k} (Y + wZ + kZ)\, A_k^{p-wd}\, A_{r-w-k}^{s} =$$

$$= \frac{(z+p-wd)(Y+wZ)+(r-w)(p-wd)Z}{z+p-wd}\, A_{r-w}^{z+p-wd}$$

$$= \frac{(z+p)Y+rpZ+[(z-rd)Z-Yd]w}{z+p-wd}\, A_{r-w}^{z+p-wd}$$

Verſuchen wir die Werthe von Y, Z, z ſo zu beſtimmen, daß die Gleichungen

$$(z+p)Y+rpZ=o$$
$$(z-rd)Z-Yd=o$$

Statt finden. Die zweite Gleichung gibt

$$Z = \frac{Yd}{z-rd}$$

Wird dieſer Werth in die erſte Gleichung ſubſtituirt, ſo haben wir:

$$(z+p)Y+\frac{rpYd}{z-rd} = o$$

das iſt $(z+p)(z-rd)+rpd=o$

oder $z^2+(p-rd)z=o$

welcher Gleichung bloß die Werthe

$$z=o \text{ und } z=rd-p$$

Genüge leiſten.

Die Annahme $z=o$ iſt unſerm gegenwärtigen Vorhaben nicht angemeſſen; denn die in dem combinatoriſchen Aggregate

$$\sum_{o,r}^{s} (Y+sZ)\, A_{r-s}^{s}\, S_s$$

auf deſſen Reduction die ganze Rechnung gerichtet iſt, vorkom-

mende Größe $\overset{s}{A}_{-s}$ verschwindet, sobald z den Werth o erhält, den Fall $s=r$ ausgenommen, in welchem $\overset{s}{A}_{-s}$ in $\overset{o}{A}_{o}$ übergeht, also, wie aus der arithmetischen Bedeutung einer mit dem Exponenten o versehenen Potenz erhellet, der Einheit gleich wird. Es bietet daher bei dieser Bestimmung von z das angeführte combinatorische Aggregat bloß ein Glied, nämlich

$$(Y+rZ)\,S_r$$

dar, welches zwar, indem die beiden Gleichungen

$$(z+p)\,Y+rpZ=o$$
$$(z-rd)\,Z-Yd=o$$

für $z=o$ auch $Y+rZ=o$ geben, verschwindet, allein zu keiner Recursionsformel für $S_r$ verhilft.

Es bleibt daher nichts weiter übrig, als

$$z=rd-p$$

zu setzen, wodurch jede der zwei obigen Gleichungen in

$$Yd+pZ=o$$

übergeht, eine Gleichung, welcher unzählige, jedoch stets einerlei Resultat herbeiführende Werthe von Y und Z entsprechen, unter denen wir die einfachsten

$$Y=p,\quad Z=-d$$

wählen.

Hiedurch findet für jeden Werth von w die Gleichung

$$\frac{(z+p-wd)(Y+wZ)+(r-w)(p-wd)Z}{z+p-wd}=o$$

Statt, ausgenommen, wenn $w=r$ gesetzt wird, in welchem Falle $z+p-wd$ verschwindet, und obiger Bruch die Form $\frac{o}{o}$ annimmt, deren wahrer Werth jedoch offenbar

$$\frac{(z+p-rd)(Y+rZ)}{z+p-rd}=Y+rZ \text{ ist.}$$

Substituiren wir alle bisher erhaltenen Resultate in dem oben für

$$\overset{s}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}(Y+sZ)\,\overset{s}{A}_{r-s}S_s$$

abgeleiteten Ausdrucke, ſo verſchwindet die darin erſcheinende Größe

$$\overset{k}{\underset{o,r-w}{\mathfrak{S}}}(Y+wZ+kZ)\,\overset{p-wd}{A_k}\,\overset{s}{A}_{r-w-k}$$

nur dann nicht, wenn $w = r$ iſt, wodurch die ſich auf den Zeiger w beziehende Summe auf ein Glied reducirt wird, und folgende Gleichung entſteht:

$$\overset{s}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}(p-sd)\,\overset{rd-p}{A}_{r-s}S_s = \frac{\lambda+r\mu}{(n+rd)(p-rd)}\,\overset{n+rd}{A}_r\,(p-rd)\,\overset{o}{A}_o$$

oder

$$\overset{s}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}(p-sd)\,\overset{rd-p}{A}_{r-s}S_s = \frac{\lambda+r\mu}{n+rd}\,\overset{n+rd}{A}_r$$

Dieſe Gleichung drückt die zwiſchen den Größen

$$S_o,\ S_1,\ S_2,\ S_3\ \ldots\ S_{r-1},\ S_r\ ,$$

beſtehende Relation aus, und iſt daher zu einer recurrirenden Beſtimmung derſelben geeignet.

Da aber zwiſchen dieſer Gleichung und der in §2 gefundenen eine leicht bemerkbare Aehnlichkeit Statt findet, welche die Vermuthung veranlaßt, $S_s$ möchte durch einen dem Zeiger s gehörenden Polynomial-Coefficienten darſtellbar ſeyn, ſo wollen wir in §2 die Größen

$$\lambda,\ \mu,\ w,\ n,\ p$$

mit

$$T,\ U,\ s,\ u,\ rd-p$$

verwechſeln, indem wir T, U, u vor der Hand als unbeſtimmt anſehen, wodurch wir die Gleichung

$$\overset{s}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}(T+sU)\,\overset{u}{A}_s\,\overset{rd-p}{A}_{r-s} = \frac{(u+rd-p)\,T+ruU}{u+rd-p}\,\overset{u+rd-p}{A}_r$$

erhalten.

Setzen wir nun

$$(T+sU)\,\overset{n}{A}_s = (p-sd)\,S_s$$
$$(u+rd-p)\,T+ruU=\lambda+r\mu$$
$$u+rd-p=n+rd$$

so ergibt sich aus der dritten dieser Annahmen

$$u = n + p$$

und es gehen die beiden andern in

$$(T+sU)\,\overset{n+p}{A}_s = (p-sd)\,S_s$$
$$(n+rd)\,T+r(n+p)\,U=\lambda+r\mu \text{ über.}$$

Lassen wir hier $s=o$ seyn, so finden wir

$$T\,\overset{n+p}{A}_o = p\,S_o$$

Aber, wie bereits oben bemerkt wurde, ist:

$$S_o = \frac{\lambda}{np}\,\overset{n}{A}_o\,\overset{p}{A}_o \text{ und}$$

wegen $\overset{n}{A}_o = A^n_o$, $\overset{p}{A}_o = A^p_o$

ist $\overset{n}{A}_o\,\overset{p}{A}_o = A^{n+p}_o = \overset{n+p}{A}_o$

folglich $T\,\overset{n+p}{A}_o = \frac{\lambda}{n}\,\overset{n+p}{A}_o$

d. h. $T = \frac{\lambda}{n}$

Endlich ergibt sich aus der zweiten der angenommenen Gleichungen:

$$U = \frac{\lambda+r\mu-(n+rd)\,T}{r(n+p)}$$

daher wird mit Zuziehung des gefundenen Werthes von T

$$U = \frac{\lambda+r\mu-(n+rd)\frac{\lambda}{n}}{r(n+p)}$$
$$= \frac{n\mu-d\lambda}{n(n+p)}$$

Setzen wir nun in der Gleichung

$$(T + sU)^{n+p} A_s = (p - sd)\, S_s$$

$s = r$, so erhalten wir:

$$S_r = \frac{T + rU}{p - rd}^{n+p} A_r = \frac{(n+p)\lambda + r(n\mu - d\lambda)}{n(n+p)(p-rd)}^{n+p} A_r$$

Es ist demnach, wenn statt $S_r$ die durch dieses Zeichen angedeutete Größe geschrieben wird:

$$\sum_{o,r}^{w} \frac{\lambda + w\mu}{(n+wd)(p-wd)}^{n+wd\ p-wd} A_w\ A_{r-w} =$$

$$= \frac{(n+p)\lambda + r(n\mu - d\lambda)}{n(n+p)(p-rd)}^{n+p} A_r$$

Es sey insbesondere: $\lambda = p$, $\mu = -d$, so ergibt sich:

$$\sum_{o,r}^{w} \frac{1}{n+wd}^{n+wd\ p-wd} A_w\ A_{r-w} = \frac{1}{n}^{n+p} A_r$$

und für $p = -n$, $r > o$

$$\sum_{o,r}^{w} \frac{1}{n+wd}^{n+wd\ -(n+wd)} A_w \cdot A_{r-w} = o.$$

## Die Umkehrung der Reihen.

### 84.

Um die Wichtigkeit der so eben bewiesenen Relation zwischen den Polynomial-Coefficienten anschaulich zu machen, wollen wir das Problem der Umkehrung der Reihen auflösen, welches aus der Gleichung

$$y^m = \sum_{o}^{r} A_r\, x^{h+rt}$$

wodurch irgend eine Potenz der Größe y in einer nach Potenzen von x fortschreitenden Reihe gegeben wird, für irgend eine Potenz von x, z. B. für $x^n$, einen nach Potenzen von y geordneten Ausdruck abzuleiten fordert.

Aus der gegebenen Gleichung folgt, wenn man beide Theile derselben zur Potenz, deren Exponent

$$\frac{n + st}{h}$$

Setzen wir nun

$$(T+sU)\overset{u}{A}_s = (p-sd)\,S_s$$
$$(u+rd-p)\,T+ruU=\lambda+r\mu$$
$$u+rd-p=n+rd$$

so ergibt sich aus der dritten dieser Annahmen

$$u = n + p$$

und es gehen die beiden andern in

$$(T+sU)\overset{n+p}{A}_s = (p-sd)\,S_s$$
$$(n+rd)\,T+r(n+p)\,U=\lambda+r\mu \text{ über.}$$

Lassen wir hier $s=o$ seyn, so finden wir

$$T\overset{n+p}{A}_o = p\,S_o$$

Aber, wie bereits oben bemerkt wurde, ist:

$$S_o = \frac{\lambda}{np}\overset{n}{A}_o\overset{p}{A}_o \text{ und}$$

wegen $\overset{n}{A}_o = A^n_o$, $\overset{p}{A}_o = A^p_o$

ist $\overset{n}{A}_o\overset{p}{A}_o = A^{n+p}_o = \overset{n+p}{A}_o$

folglich $T\overset{n+p}{A}_o = \frac{\lambda}{n}\overset{n+p}{A}_o$

d. h. $T = \frac{\lambda}{n}$

Endlich ergibt sich aus der zweiten der angenommenen Gleichungen:

$$U = \frac{\lambda+r\mu-(n+rd)\,T}{r(n+p)}$$

daher wird mit Zuziehung des gefundenen Werthes von T

$$U = \frac{\lambda+r\mu-(n+rd)\frac{\lambda}{n}}{r(n+p)}$$
$$= \frac{n\mu-d\lambda}{n(n+p)}$$

Setzen wir nun in der Gleichung

nächstvorhergehenden. Man kann daher diese unbestimmten Größen, da sie in allen Coefficienten in der ersten Potenz erscheinen, immer so bestimmen, daß das erste Glied der nach den Potenzen von x fortschreitenden Reihe den Coefficienten 1 bekommt, oder $= x^n$ wird, und alle folgenden Glieder verschwinden, wodurch zugleich das Problem, $x^n$ durch eine nach y geordnete Reihe darzustellen, gelöst ist.

Es sey also

$$K_0 \, B_0 = 1$$

und für alle Werthe von v, von der Einheit angefangen:

$$\overset{s}{\mathfrak{S}}_{0,v} \overset{s}{K}_s \overset{s}{B}_{v-s} = 0$$

so wird

$$x^n = \overset{s}{\mathfrak{S}}_{0} K_s \, y^{\frac{m(n+st)}{h}}$$

Es handelt sich jetzt nur mehr um die Bestimmung von $K_s$. Zu dieser verhilft die letzte der in 83 erhaltenen Gleichungen, nämlich

$$\overset{w}{\mathfrak{S}}_{0,r} \frac{r}{n+wd} \overset{n+wd}{A}_w \cdot \overset{-(n+wd)}{A}_{r-w} = 0$$

welche, wenn wir $\frac{n}{h}$, $\frac{t}{h}$, s, v

statt n, d, w, r setzen

und, so wie der Kürze wegen

$\overset{\frac{n+st}{h}}{A}_{v-s}$ durch $\overset{s}{B}_{v-s}$

vorgestellt wird, auch

$-\overset{\left(\frac{n+st}{h}\right)}{A}_s$ durch $\overset{s}{C}_s$ andeuten,

folgende Gestalt annimmt:

$$\overset{s}{\mathfrak{S}}_{0,v} \frac{1}{n+st} \overset{s}{C}_s \overset{s}{B}_{v-s} = 0$$

oder, wenn man alle Glieder dieſes combinatoriſchen Aggregates mit n multiplicirt:

$$\sum_{o,\nu} \frac{n}{n+st} \overset{s}{C}_s \overset{s}{B}_{\nu-s} = o$$

durch dieſe Gleichung werden die Werthe von

$$\frac{n}{n+st} \overset{s}{C}_s$$

für $s = o, 1, 2, 3, 4 \ldots$ ꝛc.

mittelſt der Größen

$$\overset{o}{B}_\nu, \overset{1}{B}_{\nu-1}, \overset{2}{B}_{\nu-2}, \overset{3}{B}_{\nu-3}, \ldots \text{ ꝛc.}$$

nach demſelben Recurſionsgeſetze beſtimmt, nach welchem die Werthe von

$$K_s$$

für $s = o, 1, 2, 3, 4 \ldots$ ꝛc.

durch die Gleichung

$$\sum_{o,\nu} \overset{s}{K}_s \overset{s}{B}_{\nu-s} = o$$

mittelſt eben dieſer Größen erhalten werden.

Iſt daher einer der Werthe von $K_s$ dem entſprechenden Werthe von $\frac{n}{n+st} \overset{s}{C}_s$ gleich, ſo muß allgemein

$$K_{s+1} = \frac{n}{n+st} \overset{s}{C}_s$$

ſeyn.

Nun iſt $K_o \overset{o}{B}_o = 1$

$$\text{und } \overset{o}{B}_o = \overset{\frac{n}{h}}{A}_o = A_o^{\frac{n}{h}}$$

$$\text{folglich } K_o = \frac{1}{\overset{o}{B}_o} = A_o^{-\frac{n}{h}} = \overset{-\frac{n}{h}}{A}_o$$

$$\text{oder } K_o = \overset{o}{C}_o$$

eine Gleichung, welche mit $K_s = \frac{n}{n+st} \overset{s}{C}_s$

für $s = o$ übereinstimmt, es ist daher auch allgemein:

$$K_s = \frac{n}{n+st} \overset{s}{C}_s = \frac{n}{n+st} \overset{-\left(\frac{n+st}{h}\right)}{A_s}$$

und die verlangte Umkehrung der Reihe

$$y^m = \overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} A_r x^{h+rt}$$

wird durch die Formel

$$x^n = \overset{s}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} \frac{n}{n+st} \overset{-\left(\frac{n+st}{h}\right)}{A_s} y^{\frac{m(n+st)}{h}}$$

ausgedrückt, wobei

$\overset{-\left(\frac{n+st}{h}\right)}{A_s}$ den Coefficienten von $x^{-n}$ in der Entwickelung der Potenz $= x^{-\left(\frac{n+st}{h}\right)h+st}$

$$\left[\overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} A_r x^{h+rt}\right]^{-\left(\frac{n+st}{h}\right)}$$ anzeigt.

Diese merkwürdige Formel wurde von Eschenbach unter einer etwas veränderten Gestalt durch Induction gefunden, von Hindenburg und Rothe auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht, und von Letzterem zuerst auf zweifache Art in der bereits oben erwähnten, zu Leipzig im Jahre 1793 erschienenen, Dissertation de serierum reversione bewiesen.

Da die Größe h in den Nennern der Exponenten jener Potenzen der umzukehrenden Reihe erscheint, welche die Coefficienten der Hauptgröße für die umgekehrte Reihe darbieten, so kann obige Formel nur dann angewendet werden, wenn in der umzukehrenden Reihe

$\overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} A_r x^{h+rt}$, h von o verschieden ist.

## 85.

Folgende Beiſpiele mögen den Gebrauch dieſer Formel erläutern:

1) Es ſey $y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$

$$\text{d. h.} \quad y = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{1+2r}}{(1+2r)!} ;$$

es ſoll x durch y ausgedrückt werden.

Hier iſt $m = 1$, $n = 1$, $h = 1$, $t = 2$, folglich

$$x = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{s} \frac{1}{1+2s} \overset{-(1+2s)}{A_s} y^{1+2s}$$

wobei, wie aus der früher entwickelten Polynomialformel erhellet,

$$\overset{-(1+2s)}{A_s} = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{k} \binom{-1-2s}{k} p\mathfrak{C}w_k^s \left[ -\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, -\frac{1}{7!} \text{ ꝛc.} \right] \text{ iſt.}$$

Die wirkliche Berechnung der ſucceſſiven Werthe von

$$\frac{1}{1+2s} \overset{-(1+2s)}{A_s} \text{ gibt}$$

für $s = 0$, $\overset{-1}{A_0} = 1$

$$s = 1, \ \frac{1}{3} \overset{-3}{A_1} = \frac{1}{3} \binom{-3}{1} \cdot -\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$s = 2, \ \frac{1}{5} \overset{-5}{A_2} = \frac{1}{5} \binom{-5}{1} \cdot \frac{1}{5!} + \frac{1}{5} \binom{-5}{2} \left(\frac{1}{3!}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{120} + \frac{1}{12} = \frac{3}{40}$$

$$s = 3, \ \frac{1}{7} \overset{-7}{A_3} = \frac{1}{7} \binom{-7}{1} \cdot -\frac{1}{7!} + \frac{1}{7} \binom{-7}{2} 2 \times$$

$$\times -\frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5!} + \frac{1}{7} \binom{-7}{3} \left(-\frac{1}{3!}\right)^3$$

$$= \frac{1}{5040} - \frac{1}{90} + \frac{1}{18} = \frac{5}{112}$$

u. ſ. w.

Es ist demnach

$$x = y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{3}{40} y^5 + \frac{5}{112} y^7 + \text{ꝛc.}$$

Obschon die Umkehrungsformel den numerischen Werth jedes beliebigen Gliedes der umgekehrten Reihe an die Hand gibt, so läßt sich durch dieselbe das allenfalls zwischen den Coefficienten in der umgekehrten Reihe bestehende Bildungsgesetz nur in so fern mit völliger Gewißheit erkennen, als man eine bestimmte Relation zwischen den Polynomial-Coefficienten von der Form

$$\overset{-\left(\frac{n+st}{h}\right)}{A_s}$$

nachzuweisen vermag, welches jedoch, wenn nicht indirecte Betrachtungen zu Hülfe genommen werden können, in den meisten Fällen mit bedeutenden Schwierigkeiten verknüpft seyn dürfte.

So lassen sich in dem obigen Beispiele die dort erhaltenen Anfangsglieder der Reihe für x unter folgender Gestalt darstellen:

$$x = y + \frac{1}{2.3} y^3 + \frac{1.3}{2.4.5} y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} y^7 + \text{ꝛc.}$$

wodurch das Gesetz, nach welchem dieselben fortschreiten, sogleich in die Augen fällt, obgleich die Allgemeingültigkeit dieses Gesetzes für alle folgenden Glieder der Reihe hiedurch keineswegs begründet ist.

2) Es sey $x = 1 + x^a y$ und $x^n$ durch y auszudrücken.

Hier ist $y = \frac{x-1}{x^a} = x^{-a+1} - x^{-a}$

folglich in der obigen Umkehrungsformel

$m = 1$, $h = -a + 1$, $t = -1$ zu setzen. Man findet

$$x^n = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{s} \frac{n}{n-s} \overset{\frac{n-s}{a-1}}{A_s} y^{-\left(\frac{n-s}{a-1}\right)}$$

$$\text{wobei } \overset{\overset{n-s}{\overline{\overline{a-1}}}}{A_s} = \sum_{o}^{k} \binom{\overset{n-s}{\overline{\overline{a-1}}}}{k} p\mathfrak{C}w_k^o\,(-1) \text{ ist.}$$

Wie man sieht, kann hier k bloß den einzigen Werth s annehmen, daher ist

$$\overset{\overset{n-s}{\overline{\overline{a-1}}}}{A_s} = \binom{\overset{n-s}{\overline{\overline{a-1}}}}{s} (-1)^s$$

$$\text{also } x^n = \sum_{o}^{s} \frac{n}{n-s} \binom{\overset{n-s}{\overline{\overline{a-1}}}}{s} (-1)^s \; y^{-\binom{\overset{n-s}{\overline{\overline{a-1}}}}{}}$$

Durch Kunstgriffe, für welche sich keine allgemeinen Regeln geben lassen, erhält man in solchen Fällen die zu suchende Reihe oft unter einer einfacheren oder doch zu weitern Forschungen vortheilhafteren Gestalt.

Es sey in dem vorliegenden Beispiele:

$$x^a y = z, \text{ so wird } x = y^{-\frac{1}{a}} z^{\frac{1}{a}},$$

$$\text{folglich } y^{-\frac{1}{a}} z^{\frac{1}{a}} = 1 + z \text{ und}$$

$$y^{-\frac{1}{a}} = z^{-\frac{1}{a}} + z^{-\frac{1}{a}+1}$$

Da nun auch

$$x^n = y^{-\frac{n}{a}} z^{\frac{n}{a}} \text{ ist,}$$

so suche man aus der letztern Gleichung mittelst der Umkehrungsformel eine Reihe, welche $z^{\frac{n}{a}}$ durch y darstellt.

Man wird deshalb in der erwähnten Formel statt

| | x, | m, | n, | h, | t |
|---|---|---|---|---|---|
| die Werthe | z, | $-\frac{1}{a}$, | $\frac{n}{a}$, | $-\frac{1}{a}$, | 1 |

setzen, und

$$z^{\frac{n}{a}} = \sum_{0}^{s} \frac{n}{n+as} A_s \, y^{\frac{n}{a}+s}$$

$$A_s^{n+as} = \sum_{0}^{k} \binom{n+as}{k} \, pCw_k^s(1) = \binom{n+as}{s}$$

also $z^{\frac{n}{a}} = \sum_{0}^{s} \frac{n}{n+as} \binom{n+as}{s} y^{\frac{n}{a}+s}$ finden.

Hieraus ergibt sich endlich:

$$x^n = y^{-\frac{n}{a}} \sum_{0}^{s} \frac{n}{n+as} \binom{n+as}{s} y^{\frac{n}{a}+s}$$

oder $x^n = \sum_{0}^{s} \frac{n}{n+as} \binom{n+as}{s} y^s$

Werden die ersten Glieder des combinatorischen Aggregates entwickelt, so hat man:

$$x^n = 1 + n\,y + \frac{n(n+2a-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{n(n+3a-1)(n+3a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \frac{n(n+4a-1)(n+4a-2)(n+4a-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y^4 + \text{ꝛc.}$$

## Besondere Fälle des polynomischen Lehrsatzes.

### a.) Der binomische Lehrsatz.

### 86.

Setzt man in der allgemeinen Polynomialformel

$$\left[ \sum_{0,m}^{r} A_r \, x^{h+rt} \right]^n =$$

$$= \sum_{0}^{r} \left[ x^{nh+rt} \sum_{0}^{k} \binom{n}{k} A_0^{n-k} \, pCw_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) \right]$$

$m = 1$, $A_0 = a$, $A_1 = 1$, $h = 0$, $t = 1$,

so verwandelt sich das Polynom

$$\sum_{0,m}^{r} A_r \, x^{h+rt} \text{ in das Binom } a+x;$$

ferner erstreckt sich $Cw_k^r$ bloß auf das den Zeiger $r$ führende

Element 1, und daher ist für k bloß der Werth r möglich, für welchen $pCw_k^r$ in $1^r = 1$ übergeht. Man hat also

$$(a+x)^n = \sum_{0}^{r} \binom{n}{r} a^{n-r} x^r$$

welche Gleichung für jeden Werth von n besteht, und den sogenannten binomischen Lehrsatz ausdrückt.

Schreibt man statt $\binom{n}{r}$ die durch dieses Zeichen vorgestellte Zahl

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(r-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r}$$

und läßt das Summenzeichen weg, so hat man:

$$(a+x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} x^3 + \ldots \text{ ꝛc.}$$

## 87.

Will man den binomischen Lehrsatz für sich allein, abgesondert vom polynomischen Lehrsatze auf dem kürzesten Wege erhalten, so kann dieß für einen ganzen positiven Exponenten mit Hülfe der in 65 gezeigten Entwickelung des Productes

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\ldots = \sum_{0,n}^{r} C_{n-r}(a,b,c,d.\ldots)x^r$$

geschehen, wenn man die n Größen a, b, c, d ... einander gleich setzt. Denn unter dieser Voraussetzung entsteht aus jenem Producte die Potenz

$$(a+x)^n ;$$

ferner geht jede Complexion von $C_{n-r}(a, b, c, d \ldots)$ in $a^{n-r}$ über, welche Größe so oft zu nehmen ist, als es solche Complexionen gibt, nämlich:

$$\binom{n}{n-r} \text{mal, oder wegen } 32$$

$$\binom{n}{r} \text{mal}$$

woraus sogleich

$$(a+x)^n = \overset{r}{\underset{a,n}{\mathfrak{S}}} \binom{n}{r} a^{n-r} x^r$$

folgt.

Die Allgemeingültigkeit dieser Formel, hinsichtlich der Werthe des Exponenten n, müßte dann auf demselben Wege bewiesen werden, welcher bei dem Beweise der Allgemeinheit des polynomischen Lehrsatzes (77 und 78) eingeschlagen wurde, indem man zeigt, daß wenn

$$R_n \text{ die Reihe } \overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} \binom{n}{r} a^{n-r} x^r$$

andeutet, für beliebige Werthe von n und p

$$R_n \cdot R_p = R_{n+p} \text{ ist.}$$

Zum Beweise der Richtigkeit dieser Gleichung genügen jedoch die in 75 und 76 entwickelten Sätze, und man bedarf der übrigen in 77 angestellten Betrachtungen nicht.

## 88.

Die Formel

$$(a+x)^n = \overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} \binom{n}{r} a^{n-r} x^r$$

wovon $\binom{n}{r} a^{n-r} x^r$ und

$$\binom{n}{r+1} a^{n-(r+1)} x^{r+1} = \binom{n}{r} \cdot \frac{n-r}{r+1} a^{n-(r+1)} x^{r+1}$$

zwei unmittelbar aufeinander folgende Glieder anzeigen, gibt zur Entwickelung von $(a+x)^n$ folgende Regel an die Hand:

Man bilde die Reihe

$$a^n,\ a^{n-1}x,\ a^{n-2}x^2,\ a^{n-3}x^3 \ldots$$

in deren jedem Gliede a x erscheint; a mit Exponenten, die von n angefangen stets um die Einheit abnehmen; x mit Exponenten, die von o angefangen stets um die Einheit wachsen, so

daß die Summe der Exponenten von a und x in jedem Gliede = n iſt. Man gebe dem erſten Gliede den Coefficienten 1. Um den Coefficienten eines folgenden Gliedes zu erhalten, multiplicire man den Coefficienten des nächſt vorhergehenden Gliedes mit dem dieſem letzteren Gliede zugehörigen Exponenten von a, und dividire das Product durch den im geforderten Gliede erſcheinenden Exponenten von x.

Iſt n eine ganze poſitive Zahl, ſo endigt ſich die Operation, ſobald man zu dem (n+1)ten Gliede kömmt, welches $a^{n-n} x^n$ oder $a^0 x^n = x^n$ enthält; denn die Coefficienten aller folgenden Glieder verſchwinden, da ſie den Factor 0 in ſich begreifen. Iſt aber n keine ganze poſitive Zahl, ſo wird $(a+x)^n$ durch eine unendliche Reihe ausgedrückt.

Auf die hier beſchriebene Weiſe findet man:

$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

$(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$

$(a+x)^6 = a^6 + 6a^5x + 15a^4x^2 + 20a^3x^3 + 15a^2x^4 + 6ax^5 + x^6$

u. ſ. w.

$(a+x)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}x + a^{-3}x^2 - a^{-4}x^3 + a^{-5}x^4 - a^{-6}x^5 + \ldots\ldots$

$(a+x)^{-2} = a^{-2} - 2a^{-3}x + 3a^{-4}x^2 - 4a^{-5}x^3 + 5a^{-6}x^4 - 6a^{-7}x^5 + \ldots\ldots$

$(a+x)^{-3} = a^{-3} - 3a^{-4}x + 6a^{-5}x^2 - 10a^{-6}x^3 + 15a^{-7}x^4 - 21a^{-8}x^5 + \ldots\ldots$

$(a+x)^{-4} = a^{-4} - 4a^{-5}x + 10a^{-6}x^2 - 20a^{-7}x^3 + 35a^{-8}x^4 - 56a^{-9}x^5 + \ldots\ldots$

$(a+x)^{-5} = a^{-5} - 5a^{-6}x + 15a^{-7}x^2 - 35a^{-8}x^3 + 70a^{-9}x^4 - 126a^{-10}x^5 + \ldots\ldots$

$(a+x)^{-6} = a^{-6} - 6a^{-7}x + 21a^{-8}x^2 - 56a^{-9}x^3 + 126a^{-10}x^4 - 252a^{-11}x^5 + \ldots\ldots$

u. ſ. w.

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}x - \frac{1}{2.4}a^{-\frac{3}{2}}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}a^{-\frac{5}{2}}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-\frac{7}{2}}x^4 + \ldots\ldots$$

$$\sqrt[3]{(a+x)} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}x - \frac{1.2}{3.6}a^{-\frac{5}{3}}x^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}a^{-\frac{8}{3}}x^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}a^{-\frac{11}{3}}x^4 + \ldots\ldots$$

$$\sqrt[4]{(a+x)} = a^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}a^{-\frac{3}{4}}x - \frac{1.3}{4.8}a^{-\frac{7}{4}}x^2 + \frac{1.3.7}{4.8.12}a^{-\frac{11}{4}}x^3 - \frac{1.3.7.11}{4.8.12.16}a^{-\frac{15}{4}}x^4 + \ldots\ldots$$

u. s. w.

$$\frac{1}{\sqrt{(a+x)}} = a^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}x + \frac{1.3}{2.4}a^{-\frac{5}{2}}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}a^{-\frac{7}{2}}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^{-\frac{9}{2}}x^4 - \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(a+x)}} = a^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^{-\frac{4}{3}}x + \frac{1.4}{3.6}a^{-\frac{7}{3}}x^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}a^{-\frac{10}{3}}x^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}a^{-\frac{13}{3}}x^4 - \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(a+x)}} = a^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}a^{-\frac{5}{4}}x^2 + \frac{1.5}{4.8}a^{-\frac{9}{4}}x^2 - \frac{1.5.9}{4.8.12}a^{-\frac{13}{4}}x^3 - \frac{1.5.9.13}{4.8.12.16}a^{-\frac{17}{4}}x^4 - \ldots\ldots$$

u. s. w.

89.

Da die Zahlen $1, n, \frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ u. s. w. welche wir durch die Zeichen

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \text{ u. s. w.}$$

darzuſtellen pflegen, in der allgemeinen Entwickelung der Potenz eines Binoms, als Coefficienten der aus den Beſtandtheilen des Binoms gebildeten Producte auftreten, ſo führen ſie auch den Namen: **Binomial-Coefficienten.**

So wie allgemein

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$$

iſt, ſo erhält man, indem man n mit — n vertauſcht:

$$\binom{-n}{r} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\ldots[-n-(r-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$$

$$= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$$

$$= (-1)^r \cdot \binom{n+r-1}{r}$$

Insbeſondere findet man:

$$\binom{-1}{r} = (-1)^r$$

Vertauſcht man aber in der obigen Formel n mit $\frac{m}{n}$, und mit $-\frac{m}{n}$, ſo ergibt ſich:

$$\binom{\frac{m}{n}}{r} = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\ldots\left(\frac{m}{n}-(r-1)\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$$

$$= \frac{m(m-n)(m-2n)\ldots[m-(r-1)n)}{n \cdot 2n \cdot 3n \ldots rn}$$

$$= \frac{1}{n^r} \cdot \frac{m(m-n)(m-2n)\ldots[m-(r-1)n]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$$

$$\binom{-\frac{m}{n}}{r} = (-1)^r \cdot \frac{m(m+n)(m+2n)\ldots[m+(r-1)n]}{n \cdot 2n \cdot 3n \ldots rn}$$

$$= \frac{(-1)^r}{n^r} \cdot \frac{m(m+n)(m+2n)\ldots[m+(r-1)n]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$$

Besondere Fälle dieser Ausdrücke sind:

$$\binom{\frac{1}{n}}{r} = \frac{1}{n^r} \cdot \frac{1 \cdot (1-n)(1-2n)\ldots[1-(r-1)n]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$$

welche Größe, wenn $r > 0$ ist, auch

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{n^r} \cdot \frac{1 \cdot (n-1)(2n-1)\ldots[(r-1)n-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$$

gesetzt werden kann, ferner

$$\binom{-\frac{1}{n}}{r} = \frac{(-1)^r}{n^r} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)\ldots[(r-1)n+1]}{2 \cdot 3 \ldots r}$$

90.

Die für jeden Werth von n geltende Gleichung

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

kann in dem Falle, wenn n bloß ganze positive Werthe erhält, zur Verfertigung einer Tabelle der Binomial-Coefficienten mit Vortheil gebraucht werden.

Als Beispiel mag hier der Anfang einer solchen Tabelle dienen.

| Exponenten. | Stellenzeiger. | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | | | |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | | |
| 11 | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 | |
| 12 | 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 | 12 | 1 |

Jede Zahl dieſer Tabelle entſteht, wenn man die über ihr ſtehende zu der dieſer letztern vorangehenden addirt.

Da $\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r} = \pm\binom{n+r-1}{r}$ iſt (89), wobei das obere Zeichen gilt, wenn r gerade, und das untere, wenn r ungerade iſt, ſo drückt $\binom{n+r-1}{r}$ den numeri-

schen Werth von $\binom{-n}{r}$ aus. Hieraus erhellet, daß die Diagonal-Columnen der obigen Tabelle zugleich die Binomial-Coefficienten für ganze negative Exponenten angeben, und zwar, daß die Diagonal-Columne, in welcher die Coefficienten für den Exponenten $-n$ stehen, mit dem ersten Coefficienten des Exponenten $+(n-1)$ anfängt.

Ferner ist, sobald n eine ganze positive Zahl anzeigt:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n+r-1-r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

woraus man sieht, daß auch die Vertical-Columnen der obigen Tabelle die Coefficienten für ganze negative Exponenten enthalten; es stehen nämlich die Coefficienten für den Exponenten $-n$ in der zum Zeiger $n-1$ gehörenden Vertical-Columne.

Da die Entwickelung von $(a+x)^n$, wenn n eine ganze positive Zahl ist, aus $n+1$ Gliedern besteht, so gibt es für den Exponenten $+n$ in Allem $n+1$ Binomial-Coefficienten. Der Zeiger des ersten dieser Coefficienten ist 0, daher müssen sich die Zeiger zweier, vom ersten und vom letzten gleichweit abstehender, Binomial-Coefficienten zum gemeinschaftlichen Exponenten ergänzen, so daß allgemein

$$\binom{n}{r} \text{ und } \binom{n}{n-r}$$

zwei solche Coefficienten vorstellen. Es ist aber

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad (32)$$

daher sind zwei vom Anfange und vom Ende der Binomialformel gleichweit entfernte Coefficienten einander gleich. Ist der ganze positive Exponent n gerade, also $n+1$ ungerade, so enthält $(a+x)^n$ ein mittleres Glied, ein solches nämlich, welchem gleichviel Glieder vorangehen und nachfolgen. Der Zeiger desselben ist $= \frac{n}{2}$. Ist aber n ungerade, so gibt es zwei

unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder, deren Abstände vom Anfange und vom Ende des Ausdruckes für $(a+x)^n$ einander gleich sind, und welchen daher gleiche Coefficienten zukommen. Ihre Zeiger werden durch die Zahlen $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ angedeutet.

Hieraus folgt, daß es hinreicht, von jeder horizontalen Columne der obigen Tabelle nur jene Glieder anzugeben, deren Stellenzahlen die Hälfte des entsprechenden Potenzexponenten nicht übersteigen, wodurch diese Tabelle nachstehende Gestalt annimmt:

| Exponenten. | Binomial-Coefficienten. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | | |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | |
| 11 | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | |
| 12 | 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924. |

Um die Binomial-Coefficienten für ganze negative Exponenten zu finden, wird man, den obigen Andeutungen gemäß, anfänglich in diagonaler Richtung, so weit es möglich ist, fortgehen, und dann der an das Ende der ersteren sich anschließenden verticalen Richtung folgen.

91.

Sowohl für die Summe, als auch für die Summe der Quadrate aller, einem ganzen positiven Exponenten gehörenden, Binomial-Coefficienten läßt sich ein einfacher Ausdruck angeben.

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$(a+x)^n = \sum_{0}^{r} \binom{n}{r} a^{n-r} x^r$$

$a = 1$, $x = 1$, so erhält man:

$$(1+1)^n = \sum_{0}^{r} \binom{n}{r} = 2^n$$

d. h. die Summe aller Binomial-Coefficienten für den Exponenten n ist $= 2^n$, ein Satz, welcher zwar für jeden Werth von n gilt, allein sobald n keine ganze positive Zahl ist, die Summirung einer unendlichen Reihe darstellt.

Es ist ferner nach 76 allgemein:

$$\sum_{0,k}^{v} \binom{n}{v} \binom{p}{k-v} = \binom{n+p}{k}$$

Setzt man hier $n = p = k$, wodurch, weil k nothwendig eine ganze positive Zahl ist, auch n eine solche wird, und berücksichtiget man die Gleichung

$$\binom{n}{n-v} = \binom{n}{v}$$

so geht obige Gleichung in $\sum_{0,n}^{v} \binom{n}{v}^2 = \binom{2n}{n}$ über.

Es ist nämlich die Summe der Quadrate aller einem ganzen positiven Exponenten entsprechenden Binomial-Coefficienten dem Mittelgliede in der Reihe der Coefficienten für den doppelten Exponenten gleich.

Ueberſetzt man das Zeichen $\binom{2n}{n}$ in die Größe, welche es vorstellt, so erhält man:

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n\,(2n-1)(2n-2)\,\ldots\,(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,\ldots\, n}$$

unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder, deren Abstände vom Anfange und vom Ende des Ausdruckes für $(a+x)^n$ einander gleich sind, und welchen daher gleiche Coefficienten zukommen. Ihre Zeiger werden durch die Zahlen $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ angedeutet.

Hieraus folgt, daß es hinreicht, von jeder horizontalen Columne der obigen Tabelle nur jene Glieder anzugeben, deren Stellenzahlen die Hälfte des entsprechenden Potenzexponenten nicht übersteigen, wodurch diese Tabelle nachstehende Gestalt annimmt:

| Exponenten. | Binomial-Coefficienten. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | | |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | |
| 11 | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | |
| 12 | 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924. |

Um die Binomial-Coefficienten für ganze negative Exponenten zu finden, wird man, den obigen Andeutungen gemäß, anfänglich in diagonaler Richtung, so weit es möglich ist, fortgehen, und dann der an das Ende der ersteren sich anschließenden verticalen Richtung folgen.

$$\sum_{0,s}^{r}(-1)^r\binom{n}{k-r}=\sum_{0,s}^{r}(-1)^r\binom{n-1}{k-r}+\sum_{0,s}^{r}(-1)^r\binom{n-1}{k-r-1}$$

$$=\binom{n-1}{k}+\sum_{1,s}^{r}(-1)^r\binom{n-1}{k-r}+\sum_{0,s-1}^{r}(-1)^r\binom{n-1}{k-r-1}+(-1)^s\binom{n-1}{k-s-1}$$

wenn nämlich von der vorhergehenden Summe das erste, und von der nachfolgenden das letzte Glied abgesondert wird.

Es ist aber:

$$\sum_{0,s-1}^{r}(-1)^r\binom{n-1}{k-r-1}=\sum_{1,s}^{r}(-1)^{r-1}\binom{n-1}{k-r}$$

$$=-\sum_{1,s}^{r}(-1)^r\binom{n-1}{k-r}$$

daher tilgen sich die beiden Summen in der obigen Gleichung, und es bleibt

$$\sum_{0,s}^{r}(-1)^r\binom{n}{k-r}=\binom{n-1}{k}+(-1)^s\binom{n-1}{k-s-1}$$

Für $s=k$ verschwindet $\binom{n-1}{k-s-1}$; es ist demnach

$$\sum_{0,k}^{r}(-1)^r\binom{n}{k-r}=\binom{n-1}{k}$$

## 94.

Mittelst des binomischen Lehrsatzes läßt sich eine merkwürdige, von E. G. Fischer in der »Theorie der Dimensionszeichen Halle 1792« zuerst gegebene Relation zwischen den Polynomial-Coefficienten nachweisen.

Es besteht nämlich (77. 78) für jeden Werth des Exponenten n die Gleichung

$$\left[\sum_{0,m}^{r}A_r\,x^{h+rt}\right]^n=\sum_{\bullet}^{r\;n}A_r\,x^{nh+rt}$$

wobei $\overset{n}{A}_r = \sum_{o}^{k} \binom{n}{k} A_o^{n-k}\ p\mathfrak{C}w_k^r\ (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$

ist, und k nie größer werden darf, als r (71).

Da k nur eine ganze positive Zahl seyn kann, so hat man nach 70, wenn man daselbst $A_o = o$ setzt, und erwägt, daß hiedurch

$$p\mathfrak{C}w_k^r\ (A_o, A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

sobald $r < k$ ist, verschwindet, weil dann jede Complexion das Element $A_o$ in Anspruch nimmt, und sobald $r = k$ oder $r > k$ ist, in

$$p\mathfrak{C}w_k^r\ (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)$$

übergeht:

$$\left[\sum_{1,m}^{r} A_r\ x^{h+rt}\right]^k = \sum_{k}^{r} p\mathfrak{C}w_k^r\ (A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)\, x^{kh+rt}$$

Andererseits aber ergibt sich aus dem binomischen Lehrsatze wegen

$$\sum_{1,m}^{r} A_r\ x^{h+rt} = \sum_{o}^{r} A_r\ x^{h+rt} - A_o\, x^h:$$

$$\left[\sum_{1,m}^{r} A_r\ x^{h+rt}\right]^k =$$

$$= \sum_{o,k}^{s} \left\{ \binom{k}{s} \left[\sum_{o,m}^{r} A_r\ x^{h+rt}\right]^{k-s} (-1)^s\, A_o^s\, x^{sh} \right\}$$

oder weil

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r\ x^{h+rt}\right]^{k-s} = \sum_{o}^{r} \overset{k-s}{A}_r\, x^{(k-s)h+rt} \text{ ist,}$$

$$\left[\sum_{1,m}^{r} A_r\ x^{h+rt}\right]^k = \sum_{o,k}^{s} \left[ (-1)^s \binom{k}{s} A_o^s\, x^{sh} \sum_{o}^{r} \overset{k-s}{A}_r\ x^{(k-s)h+rt} \right]$$

$$= \sum_{o}^{r} \left[ x^{kh+rt} \sum_{o,k}^{s} (-1)^s \binom{k}{s} A_o^s\, \overset{k-s}{A}_r \right]$$

wenn man nämlich die beiden Summenzeichen den in 58 gegebenen Vorschriften gemäß verwechselt.

Durch Vergleichung beider für

$$\left[\sum_{1,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^k$$

gefundener Ausdrücke wird ersichtlich, daß

$$pCw_k^r(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m) = \sum_{o,k}^{s} (-1)^s \binom{k}{s} A_o^s\, A_r^{k-s}$$

gesetzt werden kann. Substituirt man dieses Resultat in die Formel für $\overset{n}{A}_r$, so wird

$$\overset{n}{A}_r = \sum_{o,r}^{k}\left[\binom{n}{k} A_o^{n-k} \sum_{o,k}^{s} (-1)^s \binom{k}{s} A_k^{s\,k-s} A_r\right]$$

$$= \sum_{o,r}^{k}\sum_{o,k}^{s} (-1)^s \binom{n}{k}\binom{k}{s} A_o^{n-(k-s)}\, A_r^{k-s}$$

Es sey $k-s=r-w$, so findet man, indem man statt s den Zeiger w einführt, wobei offenbar w alle ganzen positiven Werthe von o angefangen bis r, und k wegen $k=r-w+s$ nur die Werthe von $r-w$ bis r erhält,

$$\overset{n}{A}_r = \sum_{o,r}^{w}\left[A_o^{n-(r-w)} \overset{r-w}{A}_{r-w,r} \sum^{k} (-1)^{k-(r-w)} \binom{n}{k}\binom{k}{k-(r-w)}\right]$$

Aber es ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots[n-(r-w-1)]}{1\cdot 2 \ldots (r-w)} \cdot \frac{[n-(r-w)]\ldots[n-(k-1)]}{(r-w+1)\ldots k}$$

$$= \binom{n}{r-w} \cdot \frac{[n-(r-w)]\ldots[n-(k-1)]}{(r-w+1)\ldots k}$$

$$\text{und } \binom{k}{k-(r-w)} = \frac{k(k-1)\ldots(r-w+1)}{1\cdot 2 \ldots [k-(r-w)]}$$

folglich

$$\binom{n}{k}\binom{k}{k-(r-w)} = \binom{n}{r-w} \frac{[n-(r-w)]\ldots[n-(k-1)]}{1 \ldots [k-(r-w)]} =$$

$$= \binom{n}{r-w}\binom{n-(r-w)}{k-(r-w)}$$

daher $\sum_{r-w,r}^{k} (-1)^{k-(r-w)} \binom{n}{k} \binom{k}{k-(r-w)} =$

$$= \binom{n}{r-w} \sum_{r-w,r}^{k} (-1)^{k-(r-w)} \binom{n-(r-w)}{k-(r-w)}$$

Man setze hier $k-(r-w) = w-v$ und reducire das letztere Aggregat auf den Zeiger $v$, so wird wegen

$$(-1)^{-v} = (-1)^{v}$$

$$\sum_{r-w,r}^{k} (-1)^{k-(r-w)} \binom{n}{k} \binom{k}{k-(r-w)} =$$

$$= (-1)^{w} \binom{n}{r-w} \sum_{o,w}^{v} (-1)^{v} \binom{n-(r-w)}{w-v}$$

Nach der Formel in 93 hat man

$$\sum_{o,w}^{v} (-1)^{v} \binom{n-(r-w)}{w-v} = \binom{n-(r-w)-1}{w}$$

daher ist

$$\sum_{r-w,r}^{k} (-1)^{k-(r-w)} \binom{n}{k} \binom{k}{k-(r-w)} =$$

$$= (-1)^{w} \binom{n}{r-w} \binom{n-(r-w)-1}{w}$$

folglich:

$$A_r^n = \sum_{o,r}^{w} \left[ (-1)^{w} \binom{n}{r-w} \binom{n-(r-w)-1}{w} A_o^{n-(r-w)} A_r^{r-w} \right]$$

Da hier $r-w$ nothwendig eine ganze positive Zahl ist, $n$ aber jeden Werth erhalten darf, so drückt diese Formel die Polynomial-Coefficienten für beliebige Exponenten durch solche Polynomial-Coefficienten aus, die sich bloß auf ganze positive Exponenten beziehen.

## 95.

Die Entwickelung der Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze kann zur näherungsweisen Berechnung der Wurzel eines beliebigen Grades für eine gegebene Zahl dienen, wenn diese Zahl zuvor auf die Form eines Binoms gebracht wird.

Da jedoch die Binomialformel, wenn sie die Ausziehung einer Wurzel ausdrückt, oder was dasselbe ist, wenn sie sich auf einen gebrochenen Exponenten bezieht, stets eine unendliche Reihe darbietet, so wollen wir zuerst erwägen, in wie fern eine unendliche Reihe nicht als bloße, höchstens einer analytischen Bedeutung fähige, Transformation oder Entwickelung einer Größe erscheint, sondern zur wirklichen Berechnung dieser Größe brauchbar ist.

96.

Soll eine unendliche Reihe den arithmetischen Werth irgend einer Größe angeben, so muß die Summe ihrer Anfangsglieder sich gedachter Größe um so mehr nähern, je mehr dieser Glieder in Anspruch genommen werden, d. h. der Unterschied zwischen der erhaltenen Summe der Anfangsglieder der Reihe und jener Größe muß durch stetes Fortschreiten in der Addition dieser Glieder so klein gemacht werden können, als man nur immer will, oder mit andern Worten: kleiner gemacht werden können, als jede gegebene noch so kleine Größe. Man pflegt in diesem Falle die Reihe eine convergirende, und im entgegengesetzten Falle eine divergirende zu nennen. Da dem mathematischen Sprachgebrauche gemäß eine Größe, der sich eine andere veränderliche so zu nähern vermag, daß der Unterschied beider ohne Ende fort abnimmt, die Grenze dieser andern heißt, so kann man sich kurz so ausdrücken: eine convergirende Reihe ist jene, für deren Summe es eine bestimmte Grenze gibt; eine divergirende aber jene, bei welcher das Gegentheil Statt findet.

97.

Damit eine unendliche Reihe convergire, ist erforderlich, daß dieselbe in eine fallende Reihe ausgehe, nämlich daß ihre Glieder von einer gewissen Stelle angefangen ununterbrochen fort abnehmen; aber nicht jede fallende Reihe ist für eine convergirende zu halten.

So ist z. B. die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{&c.} = \sum_{1}^{r}\frac{1}{r}$$

wie man sieht, eine fallende; allein man überzeugt sich leicht von ihrer Divergenz.

Theilt man nämlich diese Reihe nach Absonderung ihres ersten Gliedes in Parthien, so daß die Anzahl der Glieder, welche in den aufeinander folgenden Parthien enthalten sind, in der geometrischen Progression 1, 2, 4, 8, 16 ... $2^r$ ... fortschreitet, so ist die allgemeine Form einer dieser Parthien, und zwar jener, welche $2^r$ Glieder umfaßt

$$\frac{1}{2^r+1}+\frac{1}{2^r+2}+\frac{1}{2^r+3}+\ldots+\frac{1}{2^{r+1}}$$

Da nun in dieser Parthie jedes Glied größer ist, als das letzte $\frac{1}{2^{r+1}}$, so ist die Summe der hier vorfindigen Glieder größer, als das Product dieses letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, d. h. größer als $\frac{1}{2^{r+1}} \cdot 2^r$ oder $\frac{1}{2}$.

Es ist also $\sum_{1}^{r}\frac{1}{r}$ größer, als $\frac{1}{2}$ noch so oft genommen, folglich größer, als jede gegebene noch so große Zahl, woraus die Divergenz der Reihe

$$\sum_{1}^{r}\frac{1}{r} \text{ erhellet.}$$

98.

Betrachten wir nun eine aus n Gliedern bestehende geometrische Progression, deren erstes Glied = a, und deren Quotient = x ist, nämlich $a+ax+ax^2+ax^3+\ldots\ldots+ax^{n-1}$, welcher, unserer Bezeichnung gemäß, das Symbol

$$\sum_{0,n-1}^{r} a x^r = a \sum_{0,n-1}^{r} x^r \text{ entspricht,}$$

so ist, wie in den Lehrbüchern der Arithmetik bewiesen wird,

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{0,n-1} a x^r = a\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = a\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$$

Der erste dieser beiden Ausdrücke bezieht sich auf den Fall, wenn $x < 1$, und der andere auf den Fall, wenn $x > 1$ ist. Für $x = 1$ gehen diese Ausdrücke in $\frac{0}{0}$ über, dann aber verwandelt sich jedes Glied der Progression in a, und die Summe aller Glieder wird $= na$.

Man denke sich nun die Anzahl n der Glieder der Progression ohne Ende fort vergrößert, so nähert sich die Progression selbst ohne Ende dem Zustande der unendlichen Reihe

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \text{ꝛc.} = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} a x^r;$$

andererseits aber wird, wenn $x < 1$ ist, $x^n$, daher auch

$$\frac{a x^n}{1-x}$$

beim steten Wachsen von n, kleiner, als jede gegebene noch so kleine Größe; folglich nähert sich die Summe der Progression, nämlich

$$a\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{a}{1-x} - \frac{a x^n}{1-x}$$

ohne Ende der Größe $\frac{a}{1-x}$, d. h. eine fallende unendliche geometrische Progression ist eine convergirende Reihe, und der Grenzwerth ihrer Summe wird erhalten, wenn man das erste Glied derselben durch den Unterschied zwischen der Einheit und ihrem Quotienten theilt.

Anders verhält sich aber die Sache, wenn $x > 1$, oder $x = 1$ ist, weil in jenem Falle $\frac{a x^n}{x-1}$, und in diesem na mit n zugleich unendlich wächst, also die Summe der Progression keine Grenze zuläßt.

99.

Eine Reihe, deren jedes Glied kleiner ist, als das in einer convergirenden Reihe an derselben Stelle befindliche, muß offenbar ebenfalls eine convergirende Reihe seyn; denn vermag die Summe der ersteren, wie viele ihrer Glieder auch zusammenaddirt werden, nicht, eine festgesetzte Grenze zu übersteigen, so gilt dieß um so mehr von der letztern Reihe.

Auf diese Bemerkung gestützt, wird man in vielen Fällen über die Convergenz einer Reihe entscheiden können, wenn man dieselbe mit einer geometrischen Progression vergleicht. Wir wollen hievon sogleich bei der Betrachtung einer aus dem binomischen Lehrsatze abzuleitenden Reihe Gebrauch machen, welche die Wurzel eines gegebenen Grades aus irgend einer Zahl näherungsweise darstellt.

100.

Es sey die nte Wurzel aus der Zahl N auszuziehen.

Man wähle eine Zahl k von solcher Beschaffenheit, daß sich das Product $Nk^n$ auf die Form $a^n - x$ bringen läßt, wobei x in Bezug auf $a^n$ sehr klein ist, so hat man:

$$\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{Nk^n}}{k} = \frac{1}{k}\sqrt[n]{(a^n - x)} = \frac{a}{k}\sqrt[n]{\left(1 - \frac{x}{a^n}\right)}$$

folglich, wenn man

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{x}{a^n}\right)} = \left(1 - \frac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe umsetzt:

$$\sqrt[n]{N} = \frac{a}{k} \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \binom{\frac{1}{n}}{r} (-1)^r \left(\frac{x}{a^n}\right)^r$$

Nun ist für $r = 0$, $\binom{\frac{1}{n}}{r} = 1$, und für $r > 0$ wie in 89 gezeigt wurde:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{n}{r}} = \frac{(-1)^{r-1}}{n^r} \cdot \frac{1.(n-1)(2n-1)\ldots\ldots[(r-1)n-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots \cdot r}$$

folglich $\sqrt[n]{N} =$

$$= \frac{a}{k}\left[1 + \sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{2r-1}}{n^r} \cdot \frac{1.(n-1)(2n-1)\ldots[(r-1)n-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \left(\frac{x}{a^n}\right)^r\right]$$

und weil $2r-1$ stets ungerade ist:

$$\sqrt[n]{N} = \frac{a}{k}\left[1 - \sum_{1}^{r} \frac{1.(n-1)(2n-1)\ldots[(r-1)n-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r} \left(\frac{x}{na^n}\right)^r\right]$$

Das von der Einheit abzuziehende combinatorische Aggregat stellt hier eine convergirende unendliche Reihe dar. Es entsteht nämlich das dem Zeiger $r+1$ zugehörende Glied dieses Aggregates aus dem nächstvorhergehenden Gliede, wenn dasselbe mit

$$\frac{rn-1}{(r+1)n} \cdot \frac{x}{a^n}$$

multiplicirt wird. Aber offenbar ist

$$rn-1 < rn+n$$

$$\text{also } \frac{rn-1}{(r+1)n} < 1$$

ferner ist der Annahme gemäß

$$x < a^n \text{ also } \frac{x}{a^n} < 1$$

folglich $\frac{rn-1}{(r+1)n} \cdot \frac{x}{a^n}$ ein echter Bruch; es bilden daher die Glieder des erwähnten Ausdruckes eine abnehmende Reihe.

Der Factor $\frac{rn-1}{r+1}$ nimmt zu, wenn r wächst; denn der Unterschied zwischen diesem Bruche und jenem, welcher entsteht, wenn r um $\delta$ vergrößert wird, nämlich

$$\frac{rn-1}{r+1} - \frac{(r+\delta)n-1}{r+\delta+1} = \frac{-\delta(n+1)}{(r+1)(r+\delta+1)}$$

ist negativ, daher

$$\frac{(r+\delta)n-1}{r+\delta+1} > \frac{rn-1}{r+1}$$

Betrachtet man nun die Glieder, welche in obiger Summe auf das dem Zeiger r entsprechende Glied, deſſen numeriſcher Werth durch $P_r$ vorgeſtellt werde, folgen, ſo iſt das erſte derſelben

$$P_{r+1} = P_r \frac{rn-1}{(r+1)n} \cdot \frac{x}{a^n}$$

und die übrigen ſind nach der Reihe kleiner als die Producte, welche man erhält, indem man dieſes erſtere fortwährend mit $\frac{x}{a^n}$ multiplicirt, aber größer als die Producte, welche ſich durch die Multiplication mit $\frac{rn-1}{(r+1)n} \cdot \frac{x}{a^n}$ ergeben.

Hieraus erhellet, daß die Summe aller auf $P_r$ folgenden Glieder des obigen Ausdruckes zwiſchen den unendlichen geometriſchen Progreſſionen

$$P_{r+1}\left[1+\frac{x}{a^n}+\left(\frac{x}{a^n}\right)^2+\left(\frac{x}{a^n}\right)^3+ \text{ ꝛc.}\right]$$

und

$$P_{r+1}\left[1+\frac{rn-1}{(r+1)n}\cdot\frac{x}{a^n}+\left(\frac{rn-1}{(r+1)n}\cdot\frac{x}{a^n}\right)^2+ \text{ ꝛc.}\right]$$

deren Glieder ſtets abnehmen, liegt, d. h. nach 97, zwiſchen den Grenzen

$$P_{r+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a^n}}$$

und

$$P_{r+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{rn-1}{(r+1)n}\cdot\frac{x}{a^n}}$$

Hierdurch wird man in den Stand geſetzt, den Fehler zu beurtheilen, welchen man begeht, wenn man in

$$\sum_{1}^{r} \frac{(n-1)(2n-1)\ldots[(r-1)n-1]}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r} \left[\frac{x}{na^n}\right]^r$$

alle auf das einem bestimmten Zeiger r zugehörige Glied $P_r$ folgenden Glieder vernachlässigt.

Dieser Fehler ist $< P_{r+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a^n}}$

$$\text{und} > P_{r+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{rn-1}{(r+1)n} \cdot \frac{x}{a^n}}$$

Es ist hinreichend, die Grenze zu kennen, welche der Fehler nicht übersteigt. Man erfährt hiedurch auf die wievielte Decimalstelle des Resultates man sich noch verlassen darf.

Der Fehler nimmt ab, wenn r größer wird, weil $P_{r+1}$ in dieser Beziehung abnimmt, wodurch die Behauptung, daß die oben angegebene Reihe für $\sqrt[n]{N}$ convergirt, gerechtfertigt erscheint.

Auch sieht man, daß die Convergenz dieser Reihe um so beträchtlicher ist, je kleiner x gegen $a^n$ ausfällt.

### b.) Division der Polynome.

### 101.

Der Quotient zweier Polynome kann als das Product des Dividends in die mit dem Exponenten $-1$ versehene Potenz des Divisors betrachtet werden; es findet also der polynomische Lehrsatz auch bei der Division der Polynome Anwendung.

Wir wollen zuerst den Quotienten

$$\frac{1}{\sum_{0,m}^{r} A_r x^{h+rt}} = \left[\sum_{0,m}^{r} A_r x^{h+rt}\right]^{-1}$$

entwickeln.

Setzt man in der allgemeinen Polynomialformel:

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^n =$$

$$= \sum_{o}^{r}\left[x^{nh+rt}\sum_{o}^{k}\binom{n}{k}A_o^{n-k}\; pCw_k^r\,(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)\right]$$

$n = -1$, so wird

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^{-1} =$$

$$= \sum_{o}^{r}\left[x^{-h+rt}\sum_{o}^{r}\binom{-1}{k}A_o^{-1-k}\; pCw_k^r\,(A_1, A_2, A_3 \ldots A_m)\right]$$

Nun ist $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ (89)

$$A_o^{-1-k} = A_o^{-1} \cdot A_o^{-k}$$

und der Factor $(-1)^k A_o^{-k}$ wird auf $pCw_k^r\,(A_1, A_2 \ldots A_m)$ übertragen, wenn man jedes der k Elemente in den einzelnen Complexionen durch $A_o^k$ dividirt, und das Zeichen des Quotienten ändert; daher hat man:

$$\left[\sum_{o,m}^{r} A_r\, x^{h+rt}\right]^{-1} =$$

$$= \sum_{o}^{r}\left[A_o^{-1}x^{-h+rt}\sum_{o}^{k}\; pCw_k^r\left(-\frac{A_1}{A_o}, -\frac{A_2}{A_o} \cdots -\frac{A_m}{A_o}\right)\right]$$

$$= \sum_{o}^{r}\left[\frac{x^{-h+rt}}{A_o}\; pCw^r\left(-\frac{A_1}{A_o}, -\frac{A_2}{A_o} \cdots -\frac{A_m}{A_o}\right)\right]$$

wenn man nämlich den Inbegriff aller Combinationsklassen der in 51 angenommenen Bezeichnung gemäß, durch das Combinationszeichen, ohne Beifügung eines Klassenzeigers, vorstellt.

Beispiel. Es sey das fünfte Glied des Quotienten

$$\frac{1}{(1-2x)(1+5x)(1-6x)} = \frac{1}{1-3x-28x^2+60x^3}$$

zu berechnen. Hier ist $h = 0$, $t = 1$, daher enthält dieses Glied, dessen Zeiger 4 ist, $x^4$ als Factor.

Ferner ist hier

$A_0 = 1$, also

$$-\frac{A_1}{A_0} = 3, \quad -\frac{A_2}{A_0} = 28, \quad -\frac{A_3}{A_0} = -60.$$

Die Combinationen der mit den Zeigern

1, 2, 3

versehenen Elemente

3, 28, — 60

zur Summe 4, mit den zugehörigen Versetzungszahlen multiplicirt, sind:

$$\begin{aligned} 3^4 &= 81 \\ 3^2 \cdot 28 \cdot 3 &= 756 \\ -3 \cdot 60 \cdot 2 &= -360 \\ 28^2 &= 784 \end{aligned}$$

welche zusammenaddirt 1261 als Coefficienten des zu berechnenden Gliedes geben. Es ist also das fünfte Glied des vorgelegten Quotienten $= 1261\,x^4$ wie in 67.

102.

Nun kann der Quotient zweier Polynome mit einerlei Hauptgröße und einerlei Differenz ihrer Exponenten leicht gefunden werden.

Es ist

$$\frac{\overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_r\, x^{l+rt}}{\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r\, x^{h+rt}} = \overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_r\, x^{l+rt} \cdot \overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} \frac{pCw^r}{A_o}\, x^{-h+rt}$$

wobei das Combinationszeichen sich auf die Elemente

$$-\frac{A_1}{A_0}, -\frac{A_2}{A_0}, -\frac{A_3}{A_0} \ldots -\frac{A_m}{A_0}$$

bezieht. Nimmt man die Multiplicationsformel in 64 zu Hülfe, so ergibt sich

$$\frac{\overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_r\, x^{l+rt}}{\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r\, x^{h+rt}} = \overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}} \left[ \frac{x^{l-h+rt}}{A_o} \overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} B_w\, pCw^{r-w} \right]$$

wodurch man in den Stand gesetzt ist, jedes Glied des Quotienten außer der Ordnung zu finden, ohne der ihm vorangehenden Glieder zu bedürfen.

103.

Der so eben erhaltene Quotient der Polynome

$$\overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}} B_r\, x^{l+rt} \quad \text{und} \quad \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}} A_r\, x^{h+rt}$$

ist einer fernern Reduction fähig, sobald $B_r$ die Form $(\lambda + r\mu)A_r$ hat, wobei $\lambda$ und $\mu$ beliebige von r unabhängige Zahlen anzeigen.

Wie die in 101 geführte Rechnung zeigt, ist

$$\frac{1}{A_o}\, pCw^r \left( -\frac{A_1}{A_o}, -\frac{A_2}{A_o}, -\frac{A_3}{A_o} \ldots -\frac{A_m}{A_o} \right)$$

ein Coefficient, welcher, der in 77 angenommenen Bezeichnung gemäß, durch $\overset{-1}{A}_r$ vorgestellt werden kann.

Es ist also, mit Rücksicht auf 82

$$\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} B_w \frac{pCw^{r-w}}{A_o} = \overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} (\lambda + w\mu)\, \overset{-1}{A}_w \overset{-1}{A}_{r-w}$$

$$= \overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} (\lambda + w\mu)^{+1} \overset{-1}{A}_w \overset{-1}{A}_{r-w}$$

welcher Ausdruck für $r = o$, den Werth $\lambda$, und wenn $r > o$ ist

den Werth $-r\mu \overset{k}{\underset{1}{\mathfrak{S}}} \frac{1}{k}\, pCw_k^r$ erhält,

folglich hat man:

$$\frac{\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}}(\lambda+r\mu)A_r\,x^{l+rt}}{\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}}A_r\,x^{h+rt}} = \lambda\,x^{l-h} - \mu\overset{r}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}\left\{r\,x^{l-h+rt}\overset{k}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}\frac{1}{k}\,pCw^r_k\right\}$$

wobei das Combinationszeichen sich auf die Elemente

$$-\frac{A_1}{A_0}, -\frac{A_2}{A_0}, -\frac{A_3}{A_0} \ldots -\frac{A_m}{A_0}$$

bezieht.

104.

Setzt man $\frac{1}{A_0}\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}B_w\,pCw^{r-w} = K_r$

so ist

$$\frac{\overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}}B_r\,x^{l+rt}}{\overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}}A_r\,x^{h+rt}} = \overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}}K_r\,x^{l-h+rt}$$

folglich:

$$\overset{r}{\underset{o,n}{\mathfrak{S}}}B_r\,x^{l+rt} = \overset{r}{\underset{o,m}{\mathfrak{S}}}A_r\,x^{h+rt}\cdot\overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}}K_r\,x^{l-h+rt}$$

$$= \overset{r}{\underset{o}{\mathfrak{S}}}\left\{x^{l+rt}\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}A_w\,K_{r-w}\right\}$$

Beide Ausdrücke sind identisch, daher besteht die Gleichung

$$\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}}A_w\,K_{r-w} = B_r$$

oder $A_0\,K_r + \overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}A_w\,K_{r-w} = B_r$

aus welcher

$$K_r = \frac{B_r - \overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}A_w\,K_{r-w}}{A_0}$$

gefunden wird, eine Formel, welche zur recurrirenden Berechnung der Glieder des Quotienten obiger Polynome dient.

Für $r = o$ ist $K_o = \frac{B_o}{A_o}$

also $K_1 = \frac{B_1 - A_1 K_o}{A_o}$

$K_2 = \frac{B_2 - A_1 K_1 - A_2 K_o}{A_o}$

$K_3 = \frac{B_3 - A_1 K_2 - A_2 K_1 - A_3 K_o}{A_o}$

u. s. w.

Die Multiplicatoren

$$-\frac{A_1}{A_o}, -\frac{A_2}{A_o}, -\frac{A_3}{A_o} \ldots -\frac{A_m}{A_o}$$

der vorangehenden Coefficienten eines Quotienten zweier Polynome in den Formeln, welche zur Bestimmung der folgenden Coefficienten dienen, und welche, sobald die Coefficienten des Dividends $B_1$, $B_2$, $B_3$ . . . erschöpft sind, hiezu allein hinreichen, heißen zusammengenommen die Recursions-Scale des Quotienten. Der Quotient selbst aber wird eine recurrirende Reihe genannt.

Obige Formeln enthalten folgende Vorschrift zur Bildung des Quotienten zweier nach einerlei Hauptgröße geordneter Polynome.

Man untersuche ob die Exponenten der Hauptgröße, sowohl im Dividend als auch im Divisor, eine arithmetische Progression darstellen, und ob die Differenz beider Progressionen dieselbe ist, denn nur für diesen Fall können die Formeln gebraucht werden.

Man ordne den Dividend und den Divisor diesen Progressionen gemäß, und gebe den Coefficienten der Hauptgröße die Zahlen zu Zeigern, welche die Anzahl der vorangehenden Glieder in der Progression der Exponenten ausdrücken, nämlich o, 1, 2, 3 ꝛc.

In beiden Progressionen dürfen Lücken vorhanden seyn, weil man dieselben ausfüllt, wenn man den Coefficienten der

fehlenden Potenzen den Werth Null beilegt. Die Progreſſion der Exponenten der Hauptgröße im Quotienten beginnt mit dem Unterſchiede zwiſchen dem erſten Exponenten des Dividends und jenem des Diviſors, und erhält dieſelbe Differenz, welche im Dividend und Diviſor herrſcht. Die Glieder des Quotienten erhalten nach der Reihe die Zeiger 0, 1, 2, 3 . . . Der Coefficient des erſten Gliedes iſt der Quotient, welcher entſteht, wenn man den Coefficienten des erſten Gliedes im Dividend durch den Coefficienten des erſten Gliedes im Diviſor theilt. Die Recurſions-Scale zur Bildung der übrigen Coefficienten beſteht aus den mit entgegengeſetzten Zeichen genommenen Coefficienten des Diviſors, vom zweiten Gliede angefangen, ſämmtlich durch den Coefficienten des erſten Gliedes dividirt. Um einen Coefficienten des Quotienten zu erzeugen, multiplicirt man die vorhergehenden Coefficienten der Reihe nach mit den Gliedern der Recurſions-Scale, und ſetzt zu der Summe der Producte, wenn im Dividend ein Glied vorhanden iſt, deſſen Zeiger jenem des zu berechnenden Gliedes gleichkommt, den Coefficienten dieſes Gliedes, durch den erſten Coefficienten des Diviſors getheilt, hinzu.

### Beiſpiele.

1) Es ſey $\frac{1}{(1-2x)(1+5x)(1-6x)} = \frac{1}{1-3x-28x^2+60x^3}$ zu entwickeln.

Die Relations-Scale des Quotienten iſt $+3, +28, -60$; das erſte Glied des Quotienten erhält die Einheit zum Coefficienten, daher iſt der Coefficient

des zweiten Gliedes $= 3 . 1 = 3$
des dritten » » $= 3 . 3 + 28 . 1 = 37$
des vierten » » $= 3 . 37 + 28 . 3 - 60 . 1 = 135$
des fünften » » $= 3 . 135 + 28 . 37 - 60 . 3 = 1261$

u. ſ. w.

Die Folge der Exponenten von x im Quotienten iſt

0, 1, 2, 3, 4 . . . . .

also $\frac{1}{(1-2x)(1+5x)(1-6x)} = 1+3x+37x^2+185x^3 + 1261x^4+$ ꝛc. (Vergl. 67 und 102.)

2) Es ſey $\frac{2+5x^3}{x^2-3x^4-4x^5}$ in eine Reihe zu verwandeln.

Die Relations-Scale des Quotienten iſt 0, 3, 4; der Coefficient des Anfangsgliedes iſt 2, daher iſt der Coefficient

des zweiten Gliedes $= 0.2 = 0$
des dritten » » $= 0.0+3.2 = 6$
des vierten » » $= 0.6+3.0+4.2+5 = 13$
des fünften » » $= 0.13+3.6+4.0 = 18$
des ſechsten » » $= 0.18+3.13+4.6 = 63$

u. ſ. w.

Die Exponentenfolge im Quotienten iſt

$-2, -1, 0, +1, 2, 3, 4 . . . . .$

Demnach hat man

$$\frac{2+5x^3}{x^2-3x^4-4x^5} = 2x^{-2}+6+13x+18x^2+63x^3+ \text{ꝛc.}$$

105.

Sind die Anfangsglieder eines Polynoms, in welchem die Exponenten der Hauptgröße in arithmetiſcher Progreſſion ſtehen, ſammt der Recurſions-Scale, mittelſt welcher das Polynom in das Unbeſtimmte fortgeſetzt werden kann, gegeben, ſo laſſen ſich immer zwei Polynome finden, durch deren Diviſion das erſtere erzeugt wird. Man bringe alle Glieder der Recurſions-Scale auf einerlei Nenner, welchen man, wenn man gebrochene Zähler gelten läßt, beliebig wählen darf, ſo hat man die Coefficienten des Diviſors; der Nenner iſt der erſte, und die mit entgegengeſetzten Zeichen genommenen Zähler ſind die folgenden Coefficienten. Der Hauptgröße gebe man im erſten Gliede des Diviſors einen beliebigen Exponenten, und laſſe die Expo-

nenten derſelben in den übrigen Gliedern in arithmetiſcher Progreſſion mit der im Quotienten Statt findenden Differenz fortſchreiten. Daß hier der Coefficient und Exponent des erſten Gliedes im Diviſor willkührlich iſt, folgt daraus, daß ein Quotient unverändert bleibt, wenn man den Dividend und den Diviſor mit einerlei Größe multiplicirt, wodurch man im Stande iſt, dem erſten Gliede des Diviſors jeden beliebigen Werth zu ertheilen.

Aus dem Diviſor wird der Dividend auf folgende Art erzeugt. Die Hauptgröße desſelben erhält im erſten Gliede die Summe der Exponenten der gleichnamigen Glieder des Diviſors und Quotienten zum Exponenten; die Exponenten in den übrigen Gliedern bilden eine arithmetiſche Progreſſion mit der Differenz der Exponenten des Quotienten. Die Coefficienten des Dividends werden durch die Formel

$$B_r = \sum_{o,r}^{w} A_w \; K_{r-w}$$

beſtimmt, worin $B_r$, $A_w$, $K_{r-w}$ die in 104 gebrauchte Bedeutung haben.

Beiſpiel. Es ſey

$$-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}$$

die Relations-Scale des gegebenen Quotienten, ferner ſeyen

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{9}x + \frac{32}{27}x^2$$

ſeine Anfangsglieder, ſo wird der Diviſor, wenn man 3 für das erſte Glied desſelben annimmt,

$$= 3 + 7x + 8x^2,$$

und das erſte Glied des Dividends = 2.

Der obigen Formel zufolge ergibt ſich nun das zweite Glied des Dividends

$$= -\frac{3.5}{9} + \frac{7.2}{3} = 3,$$

das dritte $= \frac{3.3^2}{27} - \frac{7.5}{9} + \frac{8.2}{3} = 5$

daher entsteht der Quotient, dessen Relations-Scale

$$-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3} \text{ ist,}$$

und dessen Anfangsglieder

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{9}x + \frac{32}{27}x^2 \text{ sind,}$$

durch die Entwickelung des Bruches

$$\frac{2 + 3x + 5x^2}{3 + 7x + 8x^2}.$$

# Viertes Kapitel.

## Entwickelung der Exponentialgrößen.

106.

In dem vorigen Kapitel iſt gezeigt worden, wie Potenzen, deren Wurzeln zuſammengeſetzte, nach einer Hauptgröße geordnete, Ausdrücke ſind, und deren Exponenten eine monomiſche Form haben, nach den Potenzen dieſer Hauptgröße entwickelt werden können. In dem gegenwärtigen Kapitel wollen wir die Aufgabe in entgegengeſetzter Beziehung vornehmen, nämlich die Wurzeln der zu entwickelnden Potenzen eingliedrig, hingegen ihre Exponenten nach irgend einer Hauptgröße geordnet ſeyn laſſen. Man pflegt ſolche Potenzen, bei welchen die Hauptgröße im Exponenten erſcheint, Exponentialgrößen zu nennen.

Die Exponentialgröße $B^z$, wobei $z$ ein Polynom von der Geſtalt

$$\sum_{o,m}^{r} A_r x^{h+rt}$$

anzeigt, wird ohne Schwierigkeit durch einen nach Potenzen von $x$ fortſchreitenden Ausdruck dargeſtellt werden können, ſobald es gelingt, $B^z$ nach Potenzen von $z$ zu entwickeln; denn dieſe letztern Potenzen laſſen ſich ſtets mit Hülfe des polynomiſchen Lehrſatzes in Ausdrücke, welche nach Potenzen von $x$ geordnet ſind, verwandeln.

Wir wollen daher zuerst für $B^z$ einen nach Potenzen von z geordneten Ausdruck aufsuchen.

107.

Da $B^z$, sobald $B = 1$ ist, für jeden Werth von z in die Einheit übergeht, so kann von einer Entwickelung der Größe $B^z$ nach Potenzen von z nur dann die Rede seyn, wenn man B von 1 verschieden annimmt.

Es sey daher $B = 1 + \beta$, wobei $\beta$ jeden positiven oder negativen von Null verschiedenen Werth erhalten darf, so ist dem binomischen Lehrsatze gemäß:

$$B^z = (1+\beta)^z = \sum_{0}^{r} \binom{z}{r} \beta^r = 1 + \sum_{1}^{r} \binom{z}{r} \beta^r$$

Nun ist:

$$\binom{z}{r} = \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)\ldots[z-(r-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r}$$

und vermöge 65

$$z(z-1)(z-2)(z-3)\ldots[z-(r-1)] =$$

$$= z \sum_{0,r-1}^{v} \mathfrak{C}_{r-1-v}\,[-1,-2,-3\ldots-(r-1)]z^v$$

$$= \sum_{1,r}^{v} \mathfrak{C}_{r-v}\,[-1,-2,-3\ldots-(r-1)]\,z^v$$

folglich $\binom{z}{r} = \frac{1}{r!} \sum_{1,r}^{v} \mathfrak{C}_{r-v}[-1,-2,-3\ldots-(r-1)]\,z^v$

$$B^z = 1 + \sum_{1}^{r} \left[ \frac{\beta^r}{r!} \sum_{1,r}^{v} \mathfrak{C}_{r-v}[-1,-2,-3\ldots-(r-1)]\,z^v \right]$$

oder

$$B^z = 1 + \sum_{1}^{v} \left[ z^v \sum_{v}^{r} \frac{\beta^r}{r!}\, \mathfrak{C}_{r-v}[-1,-2,-3\ldots-(r-1)] \right]$$

wenn man nämlich, den im zweiten Kapitel gegebenen Vorschriften zufolge, die sich auf die Zeiger r und v beziehenden Summenzeichen verwechselt, und erwägt, daß v den ihm zugehörigen Werth von r nicht überschreiten darf, folglich auch r

nicht kleiner angenommen werden kann, als das ihm entsprechende ν.

Die so eben gefundene Gleichung gibt $B^z$ in einer nach Potenzen von z fortschreitenden Form, wie verlangt worden ist.

108.

Das combinatorische Aggregat

$$\sum_{\nu}^{r} \frac{\beta^r}{r!} \mathfrak{C}_{r-\nu}\,[-1,-2,-3\ldots-(r-1)]$$

ist noch einer andern merkwürdigen Gestalt fähig, welche sich mit Hülfe des Ausdruckes für $B^z$ darstellen läßt.

Setzt man nämlich dieses combinatorische Aggregat der Kürze wegen $= K_\nu$, so hat man

$$B^z = 1 + \sum_{1}^{\nu} K_\nu\, z^\nu$$

oder, wenn man $K_0 = 1$ gelten läßt,

$$B^z = \sum_{0}^{\nu} K_\nu\, z^\nu$$

Hieraus ergibt sich, wenn man 2z statt z schreibt,

$$B^{2z} = \sum_{0}^{\nu} K_\nu\, 2^\nu\, z^\nu$$

Aber es ist

$$B^{2z} = B^z \,.\, B^z = \sum_{0}^{\nu} K_\nu\, z^\nu \,.\, \sum_{0}^{\nu} K_\nu\, z^\nu$$

welche Gleichung, mit Hülfe der allgemeinen Multiplicationsformel 64 in

$$B^{2z} = \sum_{0}^{\nu} \left[ z^\nu \sum_{0,\nu}^{w} K_w\, K_{\nu-w} \right]$$

übergeht, daher hat man

$$\sum_{0}^{\nu} \left[ z^\nu \,.\, 2^\nu\, K_\nu \right] = \sum_{0}^{\nu} \left[ z^\nu \sum_{0,\nu}^{w} K_w\, K_{\nu-w} \right]$$

Diese Gleichung ist offenbar eine identische, weil beide Theile derselben nach einerlei Potenzen von z fortschreiten,

und z völlig unbestimmt ist, daher sind auch die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von z in beiden Theilen einander gleich, d. h. es ist

$$2^{\nu} K_{\nu} = \mathop{\mathfrak{S}}_{0,\nu}^{w} K_w K_{\nu-w}$$

$$= 2 K_{\nu} + \mathop{\mathfrak{S}}_{1,\nu-1}^{w} K_w K_{\nu-w}$$

also

$$2 (2^{\nu-1}-1) K_{\nu} = \mathop{\mathfrak{S}}_{1,\nu-1}^{w} K_w K_{\nu-w}$$

Es sey nun ν nach und nach = 2, 3, 4, u. s. w., so findet man, wenn man zugleich das Summenzeichen wegläßt:

$$2 K_2 = K_1 . K_1$$

$$K_2 = \frac{K_1^2}{2}$$

$$2 . 3 K_3 = K_1 K_2 + K_2 K_1 = K_1^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = K_1^3$$

$$K_3 = \frac{K_1^3}{2.3}$$

$$2 . 7 K_4 = K_1 K_3 + K_2 K_2 + K_3 K_1 = K_1^4 \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.3}\right)$$

$$= K_1^4 . \frac{14}{2.3.4}$$

$$K_4 = \frac{K_1^4}{2.3.4}$$

Hier zeigt sich bereits ein gemeinschaftliches Bildungsgesetz; es ist nämlich:

$$K_2 = \frac{K_1^2}{2!}, K_3 = \frac{K_1^3}{3!}, K_4 = \frac{K_1^4}{4!}$$

Nehmen wir nun an, es sey für alle innerhalb den Grenzen 1 und ν−1 liegenden Werthe von w

$$K_w = \frac{K_1^w}{w!} \text{ also auch } K^{\nu-w} = \frac{K_1^{\nu-w}}{(\nu-w)!}$$

so wird

$$2\,(2^{\nu-1}-1)\,K_\nu = \sum_{1,\nu-1}^{w} \frac{K_1^w}{w!} \cdot \frac{K_1^{\nu-w}}{(\nu-w)!} = K_2^\nu \sum_{1,\nu-1}^{w} \frac{1}{w!\,(\nu-w)!}$$

allein es ist

$$\frac{\nu!}{w!\,(\nu-w)!} = \binom{\nu}{w}$$

folglich

$$\frac{1}{w!\,(\nu-w)!} = \frac{1}{\nu!}\binom{\nu}{w}$$

daher erhält man durch Substitution dieses Ausdruckes in letztere Gleichung

$$2\,(2^{\nu-1}-1)\,K_\nu = \frac{K_1^\nu}{\nu!} \sum_{1,\nu-1}^{w} \binom{\nu}{w}$$

Das combinatorische Aggregat

$$\sum_{1,\nu-1}^{w} \binom{\nu}{w}$$

ist die Summe aller, dem ganzen positiven Exponenten $\nu$ entsprechenden, Binomial-Coefficienten, den ersten und letzten, deren jeder $= 1$ ist, weggerechnet; es ist demnach, weil die Summe sämmtlicher Binomial-Coefficienten $2^\nu$ beträgt (91)

$$\sum_{1,\nu-1}^{w} \binom{\nu}{w} = 2^\nu - 2 = 2\,(2^{\nu-1}-1)$$

Hieraus folgt

$$K_\nu = \frac{K_1^\nu}{\nu!}$$

d. h. gilt das oben bemerkte Bildungsgesetz der Größen

$$K_2,\ K_3,\ K_4 \text{ bis } K_{\nu-1},$$

so gilt es auch noch für $K_\nu$, also demselben Schlusse gemäß auch für $K_{\nu+1}$, ferner für $K_{\nu+2}$ u. s. w., woraus die Allgemeinheit dieses Gesetzes erhellet.

Da wir oben

$$K_\nu = \sum_{\nu}^{r} \frac{\beta^r}{r!}\, \mathfrak{C}_{r-\nu}\,[-1,\ -2,\ -3 \ldots -(r-1)]$$

angenommen haben, so ist:

$$K_1 = \mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{r} \frac{\beta^r}{r!}\, \mathfrak{C}_{r-1}\,[-1, -2, -3 \ldots -(r-1)]$$

Aber die $(r-1)$te Combinationsklasse für $r-1$ Elemente besteht nur aus einer einzigen Complexion, nämlich aus dem Producte aller Elemente, daher ist

$$\mathfrak{C}_{r-1}\,[-1, -2, -3 \ldots -(r-1)] = (-1)^{r-1}(r-1)!$$

$$\text{und } K_1 = \mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}(r-1)!\beta^r}{r!}$$

oder wegen $r! = (r-1)!\, r$

$$K_1 = \mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\beta^r}{r}$$

$$= \beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \text{u.}$$

Dieß führt auf die Gleichung:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{v}^{r} \frac{\beta^r}{r!}\, \mathfrak{C}_{r-v}[-1,-2,-3\ldots-(r-1)] = \frac{1}{v!}\left[\mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\beta^r}{r}\right]^v$$

welche die versprochene Transformation des linker Hand des Gleichheitszeichens stehenden combinatorischen Aggregates ausdrückt.

Auch hat man nun

$$B^z = 1 + \mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{v} \frac{K_1^v\, z^v}{v!}$$

oder

$$B^z = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{v} \frac{K_1^v\, z^v}{v!}$$

Wir werden bei dem Gebrauche dieser Formel in der Folge den Buchstaben K ohne Zeiger schreiben, also unter K das combinatorische Aggregat

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\beta^r}{r}$$

$$\text{oder } \mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}(B-1)^r}{r}$$

verstehen.

109.

Entwickelt man die Potenz

$$\left[\sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\beta^r}{r}\right]^v$$

nach dem für ganze positive Exponenten geltenden polynomischen Lehrsatze, in so fern man $\beta$ als die Hauptgröße betrachtet, so ergibt sich:

$$\left[\sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\beta^r}{r}\right]^v = \sum_{v}^{r}\left[\beta^r\, p\mathfrak{C}w_v^r\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ \text{ꝛc.}\right)\right]$$

wobei die Elemente

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ \text{ꝛc.}$$

die Zeiger

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4\ \text{ꝛc.}$$

führen; und wenn man diesen Ausdruck in die Endgleichung von 108 substituirt:

$$\sum_{v}^{r}\frac{\beta^r}{r!}\,\mathfrak{C}_{r-v}[-1, -2, -3 \ldots -(r-1)] =$$

$$= \frac{1}{v!}\sum_{v}^{r}\left[\beta^r\, p\mathfrak{C}w_v^r\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots\right)\right]$$

$$= \sum_{v}^{r}\left[\frac{\beta^r}{v!}\, p\mathfrak{C}w_v^r\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots\right)\right]$$

Diese Gleichung, welche für jeden Werth von $\beta$ besteht, und in beiden Gliedern Polynome enthält, die nach denselben Potenzen von $\beta$ geordnet sind, ist nothwendig eine identische. Man hat daher auch

$$\frac{1}{r!}\,\mathfrak{C}_{r-v}[-1, -2, -3 \ldots -(r-1)] =$$

$$= \frac{1}{v!}\, p\mathfrak{C}w_v^r\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots -\frac{1}{4}\ldots\right)$$

oder

und z völlig unbeſtimmt iſt, daher ſind auch die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von z in beiden Theilen einander gleich, d. h. es iſt

$$2^{\nu} K_{\nu} = \sum_{0,\nu}^{w} K_w K_{\nu-w}$$

$$= 2 K_{\nu} + \sum_{1,\nu-1}^{w} K_w K_{\nu-w}$$

alſo

$$2 (2^{\nu-1}-1) K_{\nu} = \sum_{1,\nu-1}^{w} K_w K_{\nu-w}$$

Es ſey nun ν nach und nach = 2, 3, 4, u. ſ. w., ſo findet man, wenn man zugleich das Summenzeichen wegläßt:

$$2 K_2 = K_1 . K_1$$

$$K_2 = \frac{K_1^2}{2}$$

$$2 . 3 K_3 = K_1 K_2 + K_2 K_1 = K_1^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = K_1^3$$

$$K_3 = \frac{K_1^3}{2.3}$$

$$2 . 7 K_4 = K_1 K_3 + K_2 K_2 + K_3 K_1 = K_1^4 \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.3}\right)$$

$$= K_1^4 . \frac{14}{2.3.4}$$

$$K_4 = \frac{K_1^4}{2.3.4}$$

Hier zeigt ſich bereits ein gemeinſchaftliches Bildungsgeſetz; es iſt nämlich:

$$K_2 = \frac{K_1^2}{2!}, K_3 = \frac{K_1^3}{3!}, K_4 = \frac{K_1^4}{4!}$$

Nehmen wir nun an, es ſey für alle innerhalb den Grenzen 1 und ν—1 liegenden Werthe von w

$$K_w = \frac{K_1^w}{w!} \text{ alſo auch } K^{\nu-w} = \frac{K_1^{\nu-w}}{(\nu-w)!}$$

ſo wird

109.

Entwickelt man die Potenz

$$\left[\sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\beta^r}{r}\right]^v$$

nach dem für ganze positive Exponenten geltenden polynomischen Lehrsatze, in so fern man $\beta$ als die Hauptgröße betrachtet, so ergibt sich:

$$\left[\sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\beta^r}{r}\right]^v = \sum_{v}^{r}\left[\beta^r\, p\mathfrak{C}w_v^r\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ \text{ꝛc.}\right)\right]$$

wobei die Elemente

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ \text{ꝛc.}$$

die Zeiger

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4\ \text{ꝛc.}$$

führen; und wenn man diesen Ausdruck in die Endgleichung von 108 substituirt:

$$\sum_{v}^{r} \frac{\beta^r}{r!}\, \mathfrak{C}_{r-v}[-1, -2, -3 \ldots -(r-1)] =$$

$$= \frac{1}{v!} \sum_{v}^{r}\left[\beta^r\, p\mathfrak{C}w_v^r\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots\right)\right]$$

$$= \sum_{v}^{r}\left[\frac{\beta^r}{v!}\, p\mathfrak{C}w_v^r\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots\right)\right]$$

Diese Gleichung, welche für jeden Werth von $\beta$ besteht, und in beiden Gliedern Polynome enthält, die nach denselben Potenzen von $\beta$ geordnet sind, ist nothwendig eine identische. Man hat daher auch

$$\frac{1}{r!}\, \mathfrak{C}_{r-v}[-1, -2, -3 \ldots -(r-1)] =$$

$$= \frac{1}{v!}\, p\mathfrak{C}w_v^r\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots\right)$$

oder

$$\mathfrak{C}_{r-\nu}[-1,-2,-3\ldots-(r-1)] =$$
$$= \frac{r!}{\nu!}\, p\mathfrak{C}\mathfrak{w}^r_\nu\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots\right)$$

und wenn man $r-\nu = k$ setzt,

$$\mathfrak{C}_k[-1,-2,-3\ldots-(r-1)] =$$
$$= \frac{r!}{(r-k)!}\, p\mathfrak{C}\mathfrak{w}^r_{r-k}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots\right)$$

Nimmt man die Elemente in jeder Complexion von

$$\mathfrak{C}_k[-1,-2,-3\ldots-(r-1)]$$

mit entgegengesetzten Zeichen, so muß jede Complexion, damit ihr Werth genau derselbe bleibt, $(-1)^k$ zum Factor erhalten. Es ist daher

$$\mathfrak{C}_k[-1,-2,-3\ldots-(r-1)] = (-1)^k\, \mathfrak{C}_k(1,2,3\ldots r-1)$$

In jeder Complexion von

$$p\mathfrak{C}\mathfrak{w}^r_{r-k}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots\right)$$

sind die mit geraden Zeigern versehenen Elemente negativ; es hängt daher das Zeichen jeder Complexion davon ab, ob sie eine gerade oder eine ungerade Anzahl dieser Elemente enthält. Die Summe der Zeiger aller Elemente in einer der erwähnten Complexionen beträgt r; die geraden Zeiger für sich allein betrachtet, bilden nothwendig eine gerade Summe, daher ist die Ergänzung dieser letzteren Summe zu r, welche die von den ungeraden Zeigern gebildete Summe vorstellt, gerade, wenn r gerade ist, und ungerade, wenn r ungerade ist. Eine gerade Summe kann ferner nur durch eine gerade Anzahl und eine ungerade Summe nur durch eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen erzeugt werden; folglich ist die Anzahl der mit ungeraden Zeigern versehenen Elemente in jeder zur Zeigersumme r genommenen Complexion mit r zugleich gerade oder ungerade. Da nun die Anzahl aller in einer der oben betrachteten Complexionen erscheinenden Elemente $= r-k$ ist, so erkennt man die Be-

schaffenheit der Anzahl ihrer sich auf gerade Zeiger beziehenden Elemente, wenn man die Anzahl der übrigen Elemente, oder irgend eine andere in Bezug auf die Theilbarkeit durch 2 mit letzterer Anzahl gleichartige Zahl, wie r ist, von r — k abzieht. Es ist also die Anzahl der negativen Elemente in jeder Complexion von

$$p\mathfrak{C}w^r_{r-k}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \ldots\right)$$

gerade oder ungerade, je nachdem $r-k-r=-k$, oder was dasselbe ist, je nachdem k durch 2 ohne Rest getheilt werden kann oder nicht.

Es ist demnach, wie man leicht sieht, verstattet

$$p\mathfrak{C}w^r_{r-k}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \ldots\right) = (-1)^k\, p\mathfrak{C}w^r_{r-k}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\right)$$

zu setzen, wodurch man, den obigen Prämissen zufolge, auf die Gleichung

$$\mathfrak{C}_k(1,2,3,\ldots r-1) = \frac{r!}{(r-k)!}\, p\mathfrak{C}w^r_{r-k}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\right)$$

geführt wird.

Nimmt man die Bezeichnung combinatorischer Aggregate zu Hülfe, so erhält man

$$\mathfrak{C}_k(1,2,3,\ldots r-1) = \mathfrak{S}_{[a,b,c\ldots]}^{a+b+c+\ldots=r-k;\ a+2b+3c+\ldots=r} \frac{r!}{(r-k)!} \cdot \frac{(r-k)!}{a!b!c!\,\&c.} \cdot \frac{1}{1^a} \cdot \frac{1}{2^b} \cdot \frac{1}{3^c} \cdots$$

oder

$$\mathfrak{C}_k(1,2,3,\ldots r-1) = \mathfrak{S}_{[a,b,c\ldots]}^{a+b+c+\ldots=r-k;\ a+2b+3c+\ldots=r} \frac{r!}{a!b!c!\,\&c.} \cdot \frac{1}{1^a\, 2^b\, 3^c\, \&c.}$$

eine Formel, welche von Kramp, jedoch ohne Beweis, in der »Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg. Erſte Sammlung. Leipzig 1796« pag. 111, und, unter einer etwas abgeänderten Geſtalt, in der »Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, Straßburg und Leipzig 1799« pag. 71 zur Berechnung der öfters vorkommenden Combinationsklaſſen der natürlichen Zahlen ohne Wiederholungen angegeben wurde. Wir wollen dieſe zweite Geſtalt der Formel, als die zur Rechnung bequemere, hier ebenfalls anführen. Sie entſpringt aus der obigen, wenn man die Größe a wegſchafft.

Die beiden Bedingungsgleichungen zwiſchen den Größen a, b, c .... geben nämlich, wenn man die erſte derſelben von der zweiten ſubtrahirt:

$$b + 2c + \text{ꝛc.} = k$$

ferner läßt ſich die erſte Gleichung auch ſo darſtellen:

$$b + c + \text{ꝛc.} + k = r - a$$

Man ſetze $r - a = \lambda$, ſo wird $a = r - \lambda$

$$\frac{r!}{a!} = \frac{r!}{(r-\lambda)!} = \frac{1.2.3 \ldots (r-\lambda)(r-\lambda+1) \ldots (r-1)\,r}{1.2.3 \ldots (r-\lambda)}$$

$$= r(r-1) \ldots [r-(\lambda-1)]$$

folglich

$$\mathfrak{C}_k(1,2,3 \ldots r-1) = \mathfrak{S} \frac{r(r-1)(r-2) \ldots [r-(\lambda-1)]}{b!\,c!\,d!\ \text{ꝛc.}\quad 1^b\,2^c\,3^d\,4^d\ \text{ꝛc.}}$$

$$[b, c, d \ldots .]$$

$$b + 2c + 3d + \text{ꝛc.} = k$$

$$b + c + d + \text{ꝛc.} = \lambda.$$

Man hat daher alle möglichen Combinationsformen der Zahlen 1, 2, 3 .... zur Summe k mit Wiederholungen zu bilden, und abzuzählen, wie oft in jeder einzelnen Complexion das Element 1, wie oft das Element 2, wie oft 3 u. ſ. w. vorkommt. Die Anzahl dieſer Wiederholungen beſtimmt $b, c, d \ldots$; die Summe dieſer Zahlen um k vermehrt, gibt den jedem ein-

zelnen Gliede des combinatorischen Aggregates entsprechenden Werth von λ. Man sieht leicht ein, daß λ bloß zur Abkürzung der Formel dient, und nicht in das Verzeichniß der veränderlichen Größen gehört.

Es sey z. B. die Summe aller Quaternen der natürlichen Zahlen ohne Wiederholungen von 1 bis 8 inclusive zu berechnen. Wollte man diese Quaternen wirklich darstellen, um sie zu addiren, so müßte man $\binom{8}{4} = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$ Glieder anschreiben. Mittelst obiger Formel erhält man, weil das System der Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 ... mit Wiederholungen zur Summe $k = 4$, nämlich

1 1 1 1
1 1 2
1 3
2 2
4

folgende Werthe für

| b | c | d | e | λ | darbietet: |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 0 | 0 | 8 | |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 6 | |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 6 | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | |

$$\mathfrak{C}_4(1,2,3\ldots 8) = \frac{9.8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.2^4} + \frac{9.8.7.6.5.4.3}{1.2.2^2.3}$$
$$+ \frac{9.8.7.6.5.4}{2.4} + \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3^2} + \frac{9.8.7.6.5}{5}$$
$$= 9.8.7.6.5\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{5}\right)$$
$$= 22449.$$

## 110.

Ehe wir zu dem eigentlichen Gegenstande dieses Kapitels zurückkehren, wollen wir die sich uns hier darbietende Gelegenheit benützen, um zu zeigen, daß auch die zu einer gegebenen Klasse genommenen Combinationen der natürlichen Zahlen mit Wiederholungen einer ähnlichen Reduction, wie die Combinationen ohne Wiederholungen, fähig sind, welche Reduction wir ebenfalls aus der in 108 gefundenen Formel

$$B^z = \sum_0^\nu \frac{K^\nu z^\nu}{\nu!} = 1 + \sum_1^\nu \frac{K^\nu z^\nu}{\nu!}$$ schöpfen werden,

$$\text{wobei } K = \sum_1^r \frac{(-1)^{r-1}\beta^r}{r} \text{ ist,}$$

wenn nämlich $B = 1 + \beta$ gesetzt wird.

Die Gleichung $B^z = 1 + \sum_1^\nu \frac{K^\nu z^\nu}{\nu!}$

gibt

$$B^z - 1 = \sum_1^\nu \frac{K^\nu z^\nu}{\nu!}$$

hieraus folgt, wenn man beide Theile dieser Gleichung zur Potenz n, wobei n eine ganze positive Zahl seyn soll, erhebt:

$$\sum_0^r \binom{n}{r} (-1)^r B^{(n-r)z} =$$

$$= \sum_n^\nu \left[ K^\nu z^\nu \, p\mathfrak{C}w_n^\nu \left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \text{ &c.}\right)\right]$$

Nun ist $B^z = \sum_0^\nu \frac{K^\nu z^\nu}{\nu!}$

also wenn man $(n - r)\,z$ statt $z$ schreibt,

$$B^{(n-r)z} = \sum_0^\nu \frac{K^\nu (n-r)^\nu z^\nu}{\nu!}$$

Dieser Ausdruck, in obige Gleichung substituirt, gibt

$$\overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}\left[\binom{n}{r}(-1)^r \overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \frac{K^v(n-r)^v z^v}{v!}\right] =$$

$$= \overset{v}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}\left[K^v z^v \, pCw_n^v\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!} \text{ ꝛc.}\right)\right]$$

oder, wenn man in dem ersten Theile der Gleichung, den im zweiten Kapitel ertheilten Vorschriften gemäß, die Summenzeichen verwechselt:

$$\overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}\left[\frac{K^v z^v}{v!} \overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}\binom{n}{r}(-1)^r (n-r)^v\right] =$$

$$= \overset{v}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}\left[K^v z^v \, pCw_n^v\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!} \text{ ꝛc.}\right)\right]$$

Es sey der Kürze wegen:

$$\overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}\binom{n}{r}(-1)^r (n-r)^v = \overset{n}{H}_v$$

so hat man:

$$\overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}\left[K^v z^v \cdot \frac{\overset{n}{H}_v}{v!}\right] = \overset{v}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}\left[K^v z^v \, pCw_n^v\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!} \text{ ꝛc.}\right)\right]$$

Diese Gleichung ist ihrer Form nach, wegen der Unbestimmtheit von z, nothwendig eine identische, daher sind die den gleichnamigen Potenzen von z entsprechenden Coefficienten einander gleich. Es ist also

$$\frac{\overset{n}{H}_v}{v!} = pCw_n^v\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!} \text{ ꝛc. } \ldots\right)$$

Da in der obigen Gleichung, rechter Hand des Gleichheitszeichens der niedrigste Exponent von z der Zahl n gleichkommt, so verschwindet, der Identität beider Theile der Gleichung zufolge, $\frac{\overset{n}{H}_v}{v!}$ also auch $\overset{n}{H}_v$, wenn $v < n$ angenommen wird. Dasselbe zeigt auch der so eben für $\frac{\overset{n}{H}_v}{v!}$ gefundene Aus-

druck; denn $p\mathfrak{C}w_n^{\nu}$ verſchwindet, wenn $\nu < n$ iſt, und die Zeiger der zu combinirenden Elemente die Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . . u. ſ. f. ſind.

Wir wollen nun die Beſchaffenheit der Größe $\overset{n}{H}_{\nu}$ näher unterſuchen.

Die Gleichung

$$\overset{n}{H}_{\nu} = \overset{\nu}{\underset{0}{\Sigma}} \binom{n}{r} (-1)^r (n-r)^{\nu}$$

führt uns ſogleich auf eine zwiſchen den Größen von der Form $\overset{n}{H}_{\nu}$ beſtehende Relation.

Es iſt nämlich:

$$\overset{n}{H}_{\nu} = \overset{\nu}{\underset{0}{\Sigma}} \binom{n}{r} (-1)^r (n-r)^{\nu-1} (n-r)$$

$$= n \overset{\nu}{\underset{0}{\Sigma}} \binom{n}{r} (-1)^r (n-r)^{\nu-1} - \overset{\nu}{\underset{0}{\Sigma}} r \binom{n}{r} (-1)^r (n-r)^{\nu-r}$$

Aber $r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}$, $(-1)^r = -(-1)^{r-1}$

folglich

$$\overset{\nu}{\underset{0}{\Sigma}} r \binom{n}{r} (-1)^r (n-r)^{\nu-1} =$$

$$= -n \overset{\nu}{\underset{0}{\Sigma}} \binom{n-1}{r-1} (-1)^{r-1} (n-r)^{\nu-r}$$

Für $r = 0$ verſchwindet $\binom{n-1}{r-1}$, daher iſt nach Abſonderung des erſten Gliedes

$$\overset{\nu}{\underset{0}{\Sigma}} \binom{n-1}{r-1} (-1)^{r-1} (n-r)^{\nu-1} =$$

$$= \overset{\nu}{\underset{1}{\Sigma}} \binom{n-1}{r-1} (-1)^{r-1} (n-r)^{\nu-r}$$

und, wenn man in dem letztern Ausdrucke $r+1$ ſtatt $r$ ſchreibt, um die Zeigerwerthe wieder von 0 anfangen zu laſſen:

$$\overset{\nu}{\underset{0}{\Sigma}} \binom{n-1}{r-1} (-1)^{r-1} (n-r)^{\nu-1} =$$

$$= \overset{\nu}{\underset{0}{\Sigma}} \binom{n-1}{r} (-1)^r (n-1-r)^{\nu-1}$$

Dieſe Umformungen führen auf die Gleichung

$$\overset{n}{H}_v =$$

$$= n\left[\sum_0^r \binom{n}{r}(-1)^r\,(n-r)^{v-1} + \sum_0^r \binom{n-1}{r}(-1)^r\,(n-1-r)^{v-1}\right]$$

welche, wenn man die beiden innerhalb den Klammern ſtehenden combinatoriſchen Aggregate mit der Form des durch $\overset{n}{H}_v$ bezeichneten Aggregates vergleicht, in

$$\overset{n}{H}_v = n\left[\overset{n}{H}_{v-1} + \overset{n-1}{H}_{v-1}\right]$$

übergeht. Man dividire beiderſeits durch $n!$, ſo wird wegen

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\frac{\overset{n}{H}_v}{n!} = n \cdot \frac{\overset{n}{H}_{v-1}}{n!} + \frac{\overset{n-1}{H}_{v-1}}{(n-1)!};$$

man bezeichne ferner $\frac{\overset{n}{H}_v}{n!}$ durch $\overset{n}{J}_v$, ſo erhält man:

$$\overset{n}{J}_v = n\,\overset{n}{J}_{v-1} + \overset{n-1}{J}_{v-1}$$

Zerlegt man die Combinationen der natürlichen Zahlen von 1 angefangen bis n mit Wiederholungen zur Klaſſe k in zwei Parthien, wovon die eine alle Complexionen, welche das Element n enthalten, und die andere alle Complexionen, welche das Element n nicht enthalten, umfaßt, ſo ergibt ſich die Gleichung

$$Cw_k\,[1, 2, 3 \ldots n] =$$
$$= n\,Cw_{k-1}\,[1, 2, 3 \ldots n] + Cw_k\,[1, 2, 3 \ldots (n-1)]$$

Man ſetze hier $k = v - n$, und bezeichne

$Cw_{v-n}\,[1, 2, 3 \ldots n]$ durch das Symbol $\overset{n}{C}_v$, ſo findet man

$$\overset{n}{C}_v = n\,\overset{n}{C}_{v-1} + \overset{n-1}{C}_{v-1}$$

Die Form dieſer Gleichung ſtimmt genau mit jener der Gleichung

$$\overset{n}{J}_v = n\overset{n}{J}_{v-1} + \overset{n-1}{J}_{v-1}$$

überein; es wird nämlich $\overset{n}{J}_v$ auf dieſelbe Art durch $\overset{n}{J}_{v-1}$ und $\overset{n-1}{J}_{v-1}$ gegeben, auf welche $\overset{n}{C}_v$ aus $\overset{n}{C}_{v-1}$ und $\overset{n-1}{C}_{v-1}$ entſpringt.

Da ſowohl $\overset{n}{J}_v$ als auch $\overset{n}{C}_v$, wie man aus der Beſchaffenheit der durch dieſe Symbole vorgeſtellten Größen leicht erkennt, in Null übergeht, ſobald der obere Zeiger n den untern v überſteigt, ſo kann man nun, wenn ſich die Identität der Größen $\overset{n-1}{J}_{v-1}$ und $\overset{n-1}{C}_{v-1}$ für einen beſtimmten Werth von n und für jeden Werth von v nachweiſen läßt, mit Hülfe der obigen Gleichungen auch auf die Identität der Größen

$$\overset{n}{J}_v,\ \overset{n+1}{J}_v,\ \overset{n+2}{J}_v,\ \overset{n+3}{J}_v \text{ u. ſ. w.}$$

mit

$$\overset{n}{C}_v,\ \overset{n+1}{C}_v,\ \overset{n+2}{C}_v,\ \overset{n+3}{C}_v \text{ u. ſ. w. ſchließen.}$$

Denn man erhält:

$$\overset{n}{J}_n = n\overset{n}{J}_{n-1} + \overset{n-1}{J}_{n-1} = \overset{n-1}{J}_{n-1} = \overset{n-1}{C}_{n-1} = \overset{n}{C}_n$$

$$\overset{n}{J}_{n+1} = n\overset{n}{J}_n + \overset{n-1}{J}_n = n\overset{n}{C}_n + \overset{n-1}{C}_n = \overset{n}{C}_{n+1}$$

$$\overset{n}{J}_{n+2} = n\overset{n}{J}_{n+1} + \overset{n-1}{J}_{n+1} = n\overset{n}{C}_{n+1} + \overset{n-1}{C}_{n+1} = \overset{n}{C}_{n+2}$$

u. ſ. w.

alſo allgemein $\overset{n}{J}_v = \overset{n}{C}_v$;

ferner

$$\overset{n+1}{J}_{n+1} = (n+1)\overset{n+1}{J}_n + \overset{n}{J}_n = \overset{n}{J}_n = \overset{n}{C}_n = \overset{n+1}{C}_{n+1}$$

$$\overset{n+1}{J}_{n+2} = (n+1)\overset{n+1}{J}_{n+1} + \overset{n}{J}_{n+1} = (n+1)\overset{n+1}{C}_{n+1} + \overset{n}{C}_{n+1} = \overset{n+1}{C}_{n+2}$$

$$\overset{n+1}{J}_{n+3} = (n+1)\overset{n+1}{J}_{n+3} + \overset{n}{J}_{n+2} = (n+1)\overset{n+1}{C}_{n+2} + \overset{n}{C}_{n+2} = \overset{n+1}{C}_{n+3}$$

u. ſ. w.

alſo allgemein $\overset{n+1}{J}_{\nu} = \overset{n+1}{C}_{\nu}$

eben ſo $\overset{n+2}{J}_{\nu} = \overset{n+2}{C}_{\nu}$

u. ſ. w.

Hieraus folgt, daß wenn allgemein

$$\overset{s}{J}_{\nu} = \overset{s}{C}_{\nu}$$

iſt, für jeden Werth von n und ν

$$\overset{n}{J}_{\nu} = \overset{n}{C}_{\nu} \text{ ſeyn müſſe.}$$

In der That iſt aber wegen

$$\frac{\overset{1}{H}_{\nu}}{\nu!} = p\mathfrak{C}w_1^{\nu}\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!} \ldots\right) = \frac{1}{\nu!}$$

$$\overset{1}{H}_{\nu} = 1$$

folglich $\overset{1}{J}_{\nu} = \frac{\overset{1}{H}_{\nu}}{1!} = 1$

ferner $\overset{1}{C}_{\nu} = \mathfrak{C}w_{\nu-1}(1) = 1^{\nu-1} = 1$

alſo wirklich $\overset{1}{J}_{\nu} = \overset{1}{C}_{\nu}$

daher allgemein

$$\overset{n}{J}_{\nu} = \overset{n}{C}_{\nu}$$

das heißt:

$$\frac{\overset{n}{H}_{\nu}}{n!} = \mathfrak{C}w_{\nu-n}(1, 2, 3 \ldots n)$$

aber $\overset{n}{H}_{\nu} = \nu!\, p\mathfrak{C}w_n^{\nu}\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots\right)$

folglich iſt

$$\mathfrak{Cw}_{v-n}(1,2,3,\ldots,n) = \frac{v!}{n!}\, p\mathfrak{Cw}_n^{v}\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}\ldots\right)$$

oder wenn man $v-n=k$, alſo $v=k+n$ ſetzt,

$$\mathfrak{Cw}_k(1,2,3,\ldots n) = \frac{(k+n)!}{n!}\, p\mathfrak{Cw}_n^{k+n}\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}\ldots\right)$$

welche Gleichung die verlangte Reduction einer gegebenen Combinationsklaſſe der natürlichen Zahlen mit Wiederholungen ausdrückt.

Es iſt $p\mathfrak{Cw}_n^{k+n}\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}\ldots\right) =$

$$= \mathfrak{S}_{\substack{[a,b,c\ldots]\\ a+b+c+\text{ꝛc.}=n\\ a+2b+3c+\text{ꝛc.}=k+n.}} \frac{n!}{a!\,b!\,c!\ \text{ꝛc.}} \cdot \frac{1}{(1!)^a} \cdot \frac{1}{(2!)^b} \cdot \frac{1}{(3!)^c} \text{ ꝛc.}$$

Hiedurch erhält obige Gleichung folgende Geſtalt:

$$\mathfrak{Cw}_k(1,2,3,\ldots n) = \mathfrak{S}_{\substack{[a,b,c\ldots]\\ a+b+c+\text{ꝛc.}=n\\ a+2b+3c+\text{ꝛc.}=k+n,}} \frac{(k+n)!}{a!\,b!\,c!\ \text{ꝛc.}\ (1!)^a\,(2!)^b\,(3!)^c\ \text{ꝛc.}}$$

oder wenn man a auf dieſelbe Art wie in 109 wegſchafft, indem man $k+n-a=\lambda$ ſetzt:

$$\mathfrak{Cw}_k(1,2,3\ldots n) =$$

$$= \mathfrak{S}_{\substack{[b,c,d\ldots]\\ b+2c+3d+\text{ꝛc.}\ldots=k\\ b+c+d+\text{ꝛc.}+k=\lambda}} \frac{(k+n)(k+n-1)(k+n-2)\ldots.[k+n-(\lambda-1)]}{b!\,c!\,d!\ \text{ꝛc.}\ (2!)^b\,(3!)^c\,(4!)^d\ \text{ꝛc.}}$$

welche Formel die zur Rechnung bequemſte iſt.

111.

Das combinatorische Aggregat

$$\overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \binom{n}{r} (-1)^r (n-r)^v$$

welches wir oben durch $\overset{n}{H}_v$ vorstellten, läßt noch eine andere Bedeutung zu, die mit Hülfe der folgenden Betrachtungen erkannt wird.

Es sey

$$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 \ldots\ldots T_x, T_{x+1} \ldots\ldots$$

was immer für eine Folge von Größen. Man ziehe jede dieser Größen von der unmittelbar auf sie folgenden ab, so entsteht eine Folge von Unterschieden

$$T_2 - T_1, T_3 - T_2, T_4 - T_3, T_{x+1} - T_x \text{ ꝛc.} \ldots$$

welche die erste Differenzreihe der ursprünglichen, als Hauptreihe betrachteten, Größenfolge

$$T_1, T_2, T_3, T_4 \ldots\ldots T_x, T_{x+1} \ldots\ldots$$

genannt wird, und deren Glieder wir durch

$$\triangle T_1, \triangle T_2, \triangle T_3 \ldots\ldots \triangle T_x \ldots\ldots$$

bezeichnen wollen, so daß

$$\left.\begin{array}{l} \triangle T_1 = T_2 - T_1 \\ \triangle T_2 = T_3 - T_2 \\ \triangle T_3 = T_4 - T_3 \\ \ldots\ldots \end{array}\right| \quad \triangle T_x = T_{x+1} - T_x \text{ ist.}$$

Zieht man die Glieder der ersten Differenzreihe wieder von den auf sie unmittelbar folgenden ab, so erhält man die sogenannte zweite Differenzreihe, deren Glieder durch

$$\triangle\triangle T_1, \triangle\triangle T_2, \triangle\triangle T_3 \ldots \triangle\triangle T_x$$

oder kürzer, durch

$$\triangle^2 T_1, \triangle^2 T_2, \triangle^2 T_3 \ldots \triangle^2 T_x$$

vorgestellt werden sollen, und aus welcher auf dieselbe Art eine dritte Differenzreihe

$$\Delta^2 T_1, \Delta^2 T_2, \Delta^2 T_3 \ldots \Delta^2 T_x$$

abgeleitet werden kann u. ſ. w.

Offenbar iſt

$$\Delta^2 T_1 = \Delta T_2 - \Delta T_1 = T_3 - T_2 - (T_2 - T_1) =$$
$$= T_3 - 2T_2 + T_1.$$

Wäre $T_2$ das erſte Glied der Hauptreihe, ſo wäre $T_3$ das zweite, $T_4$ das dritte Glied derſelben, und $\Delta^2 T_2$ das erſte Glied der zweiten Differenzreihe; daher iſt, der ſo eben gefundenen Formel gemäß,

$$\Delta^2 T_2 = T_4 - 2T_3 + T_2$$

Nun iſt $\Delta^2 T_1 = \Delta^2 T_2 - \Delta^2 T_1$, folglich, wenn man ſtatt $\Delta^2 T_2$, $\Delta^2 T_1$ die entſprechenden Ausdrücke ſubſtituirt:

$$\Delta^2 T_1 = T_4 - 3T_3 + 3T_2 - T_1$$

Es ſteht $\Delta^2 T_2$ zu $T_5$, $T_4$, $T_3$, $T_2$ in derſelben Relation, wie $\Delta^2 T_1$ zu $T_4$, $T_3$, $T_2$, $T_1$, daher iſt

$$\Delta^2 T_2 = T_5 - 3T_4 + 3T_3 - T_2$$

Aber $\Delta^4 T_1 = \Delta^3 T_2 - \Delta^3 T_1$, folglich

$$\Delta^4 T_1 = T_5 - 4T_4 + 6T_3 - 4T_2 + T_1$$

u. ſ. w.

Da die Coefficienten der Größen $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ .... in den für $\Delta T_1$, $\Delta^2 T_1$, $\Delta^3 T_1$ .... gefundenen Ausdrücken die den Exponenten 1, 2, 3, .... gehörenden Binomial-Coefficienten ſind, ſo ſieht man, daß, wenn $\Delta^n T_1$ nach demſelben Geſetze gebildet ſeyn ſoll, welches den Ausdrücken für $\Delta T_1$, $\Delta^2 T_1$, $\Delta^3 T_1$ u. ſ. w. zum Grunde liegt,

$$\Delta^n T_1 = \sum_0^r \binom{n}{r} (-1)^r T_{n+1-r}$$

anzunehmen iſt. Unter dieſer Vorausſetzung gilt aber für $\Delta^{n+1} T_1$ dasſelbe Bildungsgeſetz. Denn denkt man ſich die Hauptreihe mit $T_2$ anfangend, ſo geht der für $\Delta^n T_1$ angenommene Ausdruck in

$$\Delta^n T_2 = \sum_0^r \binom{n}{r} (-1)^r T_{n+2-r} \text{ über.}$$

Nun ist

$\Delta^{n+1} T_x = \Delta^n T_2 - \Delta^n T_1$, folglich

$$\Delta^{n+1} T_1 = \sum_0^r \binom{n}{r} (-1)^r T_{n+2-r} - \sum_0^r \binom{n}{r} (-1)^r T_{n+1-r}$$

$$= T_{n+2} + \sum_1^r \binom{n}{r} (-1)^r T_{n+2-r} + \sum_0^r \binom{n}{r} (-1)^{r+1} T_{n+1-r}$$

oder weil

$$\sum_1^r \binom{n}{r} (-1)^r T_{n+2-r} = \sum_0^r \binom{n}{r+1} (-1)^{r+1} T_{n+1-r}$$

ist,

$$\Delta^{n+1} T_1 = T_{n+2} + \sum_0^r \left[ \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} \right] (-1)^{r+1} T_{n+1-r}$$

$$= T_{n+2} + \sum_0^r \binom{n+1}{r+1} (-1)^{r+1} T_{n+1-r}$$

$$= T_{n+2} + \sum_1^r \binom{n+1}{r} (-1)^r T_{n+2-r}$$

$$= \sum_0^r \binom{n+1}{r} (-1)^r T_{n+2-r}.$$

Es besteht also das angeführte Bildungsgesetz für $\Delta^{n+1} T_x$ sobald es für $\Delta^n T$ Statt findet. Nun gilt es für

$$\Delta T_x, \Delta^2 T_x, \Delta^3 T_x \ldots,$$

folglich allgemein.

Es wird also das erste Glied der nten Differenzreihe für die Hauptreihe

$$T_1, T_2, T_3, T_4 \text{ ꝛc.}$$

durch die Formel

$$\Delta^n T_1 = \sum_0^r \binom{n}{r} (-1)^r T_{n+1-r}$$

ausgedrückt.

112.

Es werde die Reihe der vten Potenzen der mit o anfangenden natürlichen Zahlen für die Hauptreihe angenommen, so hat man, den obigen Formeln gemäß:

$$T_1 = o^v,\ T_2 = 1^v,\ T_3 = 2^v,\ T_4 = 3^v,\ \ldots\ .$$
$$T_{n+1-r} = (n-r)^v \text{ u. s. w.}$$

daher wird das erste Glied der nten Differenzreihe:

$$\Delta^n (o^v) = \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} (-1)^r (n-r)^v$$

Da nun dieses combinatorische Aggregat genau dasselbe ist, welches oben durch $\overset{n}{H}_v$ angedeutet wurde, so besteht die Gleichung

$$\overset{n}{H}_v = \Delta^n (o^v).$$

Man nehme ferner die Reihe der (v—1)ten Potenzen der mit der Einheit anfangenden natürlichen Zahlen für die Hauptreihe an, so ist

$$T_1 = 1^{v-1},\ T_2 = 2^{v-1},\ T_3 = 3^{v-1}\ \ldots$$
$$T_{n-r} = (n-r)^{v-1}$$

Das erste Glied der (n—1)ten Differenzreihe dieser Hauptreihe ist demnach

$$\Delta^{n-1} (1^{v-1}) = \sum_{o}^{r} \binom{n-1}{r} (-1)^r (n-r)^{v-1}\ .$$

folglich ist auch

$$n\,\Delta^{n-1} (1^{v-1}) = \sum_{o}^{r} n \binom{n-1}{r} (-1)^r (n-r)^{v-1}$$

aber $n \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r} (n-r)$

daher $n\,\Delta^{n-1}(1^{v-1}) = \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} (-1)^r (n-r)^v$

also hat man noch:

$$\overset{n}{H}_v = n\,\Delta^{n-1} (1^{v-1})$$

Wie in 110 gefunden wurde, ist

$$Cw_{v-n}(1, 2, 3 \ldots n) = \frac{{}^{n}H_{v}}{n!}$$

oder, wenn man k statt $v-n$ schreibt:

$$Cw_{k}(1, 2, 3 \ldots n) = \frac{{}^{n}H_{k+n}}{n!}$$

Daher ergibt sich:

$$Cw_{k}(1, 2, 3 \ldots n) = \frac{\Delta^{n}(o^{k+n})}{n!} = \frac{\Delta^{n-1}(1^{k+n-1})}{(n-1)!}$$

Es erscheinen also die Combinationsklassen der natürlichen Zahlen mit Wiederholungen auch in enger Verbindung mit den ersten Gliedern der Differenzreihen, welche die mit o oder mit 1 anfangenden Reihen der Potenzen der natürlichen Zahlen darbieten.

So sind z. B.

0, 1, 32, 243, die ersten Glieder der Reihe der fünften Potenzen der natürlichen Zahlen, ferner

1, 31, 211 . . . die Anfangsglieder der ersten,

30, 180 . . . . . die der zweiten Differenzreihe

u. s. w.

daher ist

$\frac{30}{2!} = 15$ die Summe aller Ternen der Zahlen 1 und 2 mit Wiederholungen,

$\frac{180}{2!} = 90$ die Summe aller Ternen der Zahlen 1, 2, 3 mit Wiederholungen u. d. gl., wovon man sich durch die wirkliche Berechnung dieser Combinationsklassen leicht überzeugt.

113.

Wenden wir uns nun wieder zur Entwickelung der Exponential-Größe $B^{z}$, wenn z ein nach den Potenzen der Hauptgröße x geordnetes Polynom vorstellt,

Es ist $B^s = 1 + \sum_{1}^{v} \frac{K^v z^v}{v!} = \sum_{0,}^{v} \frac{K^v z^v}{v!}$

wobei $K = \sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1} \beta^r}{r}$ und $B = 1 + \beta$ gesetzt wird.

Man setze $z = \sum_{0,m}^{r} A_r x^{h+rt}$

so ist, dem für ganze positive Exponenten geltenden polynomischen Satze zufolge:

$$z^v = \sum_{0,vm}^{r} \left[ x^{vh+rt} \, pCw_v^r (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m) \right]$$

folglich

$$B^s = \sum_{0}^{v} \left[ \frac{K^v}{v!} \sum_{0,vm}^{r} x^{vh+rt} \, pCw_v^r (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m) \right]$$

welcher Ausdruck, da im Exponenten von x die Zeiger v und r zugleich vorkommen, keiner weiteren Anordnung nach den Potenzen von x fähig ist.

Wird aber $h = 0$ angenommen, so daß

$$z = \sum_{0,m}^{r} A_r x^{rt} \text{ ist, so hat man, weil jetzt die}$$

beiden in dem obigen Ausdruck für $B^s$ erscheinenden Summenzeichen verwechselt werden können:

$$B^s = \sum_{0}^{r} \left[ x^{rt} \sum_{0}^{v} \frac{K^v}{v!} \, pCw_v^r (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m) \right]$$

Bei der Entwickelung des sich auf den Zeiger v beziehenden combinatorischen Aggregates wird man, so wie bereits im dritten Kapitel 72 bemerkt wurde, $pCw_0^r$ sobald $r > 0$ ist, gleich Null, hingegen $pCw_0^0 = 1$ nehmen.

## 114.

Es sey der Kürze wegen

$$\sum_{0}^{v} \frac{K^v}{v!} pCw_v^r (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m) = Q_r$$

$$\text{so ist } B^x = \sum_{0}^{x} Q_r \, x^{rt}$$

Die Aehnlichkeit des Coefficienten $Q_r$ mit den Polynomial-Coefficienten läßt vermuthen, daß, so wie für diese eine recurrirende Ableitung möglich ist, auch $Q_r$ durch die vorhergehenden Coefficienten $Q_{r-1}$, $Q_{r-2}$, $Q_{r-3}$ . . . bestimmt werden könne. In der That ergibt sich eine Recursionsformel für $Q_r$, wenn man das combinatorische Aggregat

$$\sum_{1,r}^{w} w \, A_w \, Q_{r-w}$$

auf einen einfachen Ausdruck zurückführt.

$$\text{Da } Q_{r-w} = \sum_{0}^{v} \frac{K^v}{v!} \, pCw_v^{r-w} \, (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m) \text{ ist,}$$

so folgt:

$$\sum_{1,r}^{w} w A_w Q_{r-w} = \sum_{1,r}^{w} \left[ w A_w \sum_{0}^{v} \frac{K^v}{v!} \, pCw_v^{r-w} \, (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m) \right]$$

$$= \sum_{0}^{v} \left[ \frac{K^v}{v!} \sum_{1,r}^{w} w A_w \, pCw_v^{r-w} \, (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m) \right]$$

Durch die Multiplication von $A_w$ mit

$$pCw_v^{r-w} \, (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m)$$

entstehen Complexionen der Elemente $A_0, A_1, A_2 \ldots A_m$, welche sämmtlich zur Klasse $v+1$ und zur Summe $r$ gehören. Gibt man dem Zeiger $w$ alle Werthe von 1 bis $r$, so ist keine Complexion der Klasse $v+1$ zur Summe $r$ denkbar, welche hier nicht erzeugt würde. Denn da hier $r > 0$ vorausgesetzt wird, indem der kleinste Werth von $w = 1$ ist, und $r-w$ nicht negativ ausfallen darf; so besteht keine Complexion dieser Art bloß aus dem Elemente $A_0$, sondern sie enthält wenigstens eines der Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$, nach dessen Absonderung eine zur $v$ten Klasse gehörende Complexion zurückbleibt, deren Zeigersumme mit dem Zeiger des abgesonderten Elementes zu-

ſammen r ausmacht. Es läßt ſich demnach jede Combinationsform der (v + 1)ten Klaſſe zur Summe r in zwei Factoren zerfällen, wovon der eine die Form $A_w$ hat, und der andere ein Beſtändtheil von $Cw_v^{r-w}$ $(A_0, A_1 \ldots A_m)$ iſt. Beide Factoren werden in dem combinatoriſchen Aggregate

$$\sum_{1,r}^{w} w A_w \, pCw_v^{r-w} (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m)$$

wirklich mit einander multiplicirt, daher erſcheint daſelbſt jede denkbare Combinationsform der (v+1)ten Klaſſe zur Summe r. Da aber jede dieſer Combinationsformen durch die erwähnte Multiplication ſo oft hervorgebracht werden kann, als ſie verſchiedene der Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ in ſich begreift, und noch überdieß die Permutationszahlen der vſtelligen Complexionen, nebſt den Zeigern der einfachen Elemente, als Factoren in das Spiel kommen, ſo zeigt ſich in dem, nach gehöriger Reduction erhaltenen, Endreſultate des combinatoriſchen Aggregates jede der neu entſtandenen Combinationsformen mit einem, nun näher zu beſtimmenden, Factor verſehen.

Es ſey $A_a^a A_b^b A_c^c \ldots\ldots$ irgend eine Combinationsform der (v + 1)ten Klaſſe zur Summe r, wobei alſo

$$a + b + c + \ldots\ldots = v + 1$$

und $aa + bb + cc + \ldots\ldots = r$ iſt, ſo entſteht dieſelbe durch Multiplication

von $A_a$ mit $A_a^{a-1} A_b^b A_c^c \ldots\ldots$

von $A_b$ mit $A_a^a A_b^{b-1} A_c^c \ldots\ldots$

von $A_c$ mit $A_a^a A_b^b A_c^{c-1} \ldots\ldots$

u. ſ. w.

und bekommt im erſten Falle den Coefficienten

$$a \cdot \frac{v!}{(a-1)!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}}$$

im zweiten den Coefficienten

$$b \cdot \frac{v!}{a!\,(b-1)!\,c!\,\text{ꝛc.}}$$

im dritten den Coefficienten

$$c \cdot \frac{v!}{a!\,b!\,(c-1)!\,\text{ꝛc.}}$$

u. ſ. w.

Die Summe dieſer einzelnen Coefficienten, nämlich

$$(a\,a+b\,b+c\,c+\ldots) \cdot \frac{v!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}} =$$

$$= r \cdot \frac{v!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}} = \frac{r}{v+1} \cdot \frac{(v+1)!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}}$$

iſt der Coefficient von

$$A_a^a\,A_b^b\,A_c^c \ldots\ldots$$

im Endreſultate des combinatoriſchen Aggregates

$$\overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}\, w\,A_w\,p\mathfrak{C}w_v^{r-w}\,(A_o, A_1, A_2 \ldots A_m)$$

Aber $\frac{(v+1)!}{a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}}$ iſt die Permutationszahl der Combinationsform

$$A_a^a\,A_b^b\,A_c^c : \ldots\ldots$$

welche jede Complexion in dem erwähnten Endreſultate vorſtellt; daher iſt:

$$\overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}}\, w\,A_w\,p\mathfrak{C}w_v^{r-w}\,(A_o, A_1, A_2 \ldots A_m) =$$

$$= \frac{r}{v+1}\,p\mathfrak{C}w_{v+1}^{r}\,(A_o, A_1, A_2 \ldots A_m)$$

Hiedurch ergibt ſich:

$$\sum_{1,r}^{w} w\, A_w\, Q_{r-w} =$$

$$= \sum_{0}^{v} \frac{K^v}{v!} \cdot \frac{r}{v+1}\, pCw^r_{v+1}\,(A_0, A_1, A_2 \ldots A_m)$$

$$= \frac{r}{K} \sum_{0}^{v} \frac{K^{v+1}}{(v+1)!}\, pCw^r_{v+1}\,(A_0, A_1, A_2 \ldots A_m)$$

$$= \frac{r}{K} \cdot \sum_{1}^{v} \cdot \frac{K^v}{v!}\, pCw^r_v\,(A_0, A_1, A_2 \ldots A_m)$$

Da in dem oben angeführten Ausdrucke für $A_r$, sobald $r > c$ ist,

$$pCw^r_0\,(A_0, A_1, A_2 \ldots A_m) = 0 \text{ wird,}$$

so hat man:

$$\sum_{1}^{v} \frac{K^v}{v!}\, pCw^r_v\,(A_0, A_1, A_2 \ldots A_m) =$$

$$= \sum_{0}^{v} \frac{K^v}{v!}\, pCw^r_v\,(A_0, A_1, A_2 \ldots A_m)$$

$$= Q_r$$

folglich

$$\sum_{1,r}^{w} w\, A_w\, Q_{r-w} = \frac{r}{K}\, Q_r$$

$$\text{und } Q_r = \frac{K}{r} \sum_{1,r}^{w} w\, A_w\, Q_{r-w},$$

welche Formel zur recurrirenden Bestimmung von $Q_r$ dient. Der Werth von $Q_0$, welcher unabhängig von der Recursion bekannt seyn muß, ist der Bedeutung von $Q_r$ zufolge:

$$= \sum_{0}^{v} \frac{K^v}{v!}\, A^v_0$$

Uebrigens findet man $Q_0$ auch aus der Gleichung

$$B^x = \sum_{0}^{r} Q_r\, x^{rt} = Q_0 + \sum_{1}^{r} Q_r\, x^{rt}$$

wobei $z = \mathop{\mathfrak{S}}_{0,m} A_r x^{rt} = A_0 + \mathop{\mathfrak{S}}_{1,m} A_r x^{rt}$ ist,

wenn man $x = 0$ setzt. Dann wird offenbar

$$B^z = B^{A_0} = Q_0$$

$$\text{also } Q_0 = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{\nu} \frac{K^\nu A_0^\nu}{\nu!} \quad (108).$$

115.

Schreibt man in der Gleichung

$$B^z = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{\nu} \frac{K^\nu z^\nu}{\nu!}$$

statt $z$ die Größe $\frac{1}{K}$, so findet man

$$B^{\frac{1}{K}} = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{\nu} \frac{1}{\nu!}.$$

Das combinatorische Aggregat

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{\nu} \frac{1}{\nu!},$$

dessen entwickelter Ausdruck

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots \text{ ꝛc.}$$

ist, hat einen bestimmten numerischen Werth, welchen wir in der Folge stets durch den dafür allgemein üblichen Buchstaben e bezeichnen werden. Die Zahl e läßt sich mit Hülfe des obigen Ausdruckes leicht mit beliebiger Schärfe berechnen. Geht man nämlich bis zu dem Gliede $\frac{1}{\nu!}$, indem man die Summe der darauf folgenden Glieder

$$\frac{1}{(\nu+1)!} + \frac{1}{(\nu+2)!} + \frac{1}{(\nu+3)!} + \text{ ꝛc.}$$

vernachlässigt, so beträgt der Fehler, weil allgemein

$$(\nu+w)! = (\nu+1)!\ (\nu+2)\ (\nu+3)\ (\nu+4)\ \ldots\ (\nu+w)$$

also

$$(\nu+w)! > (\nu+1)!\,(\nu+1)^{w-1} \text{ und}$$

$$\frac{1}{(\nu+w)!} < \frac{1}{(\nu+1)!\,(\nu+1)^{w-1}} \text{ ist,}$$

weniger als

$$\frac{1}{(\nu+1)!}\left(1+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)^2}+\frac{1}{(\nu+1)^3}+\ldots\right)$$

d. h. weniger als

$$\frac{1}{(\nu+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\nu+1}} \text{ oder } \frac{1}{\nu!\,\nu} \quad (98)$$

und es ist folglich das unter der Gestalt eines Decimalbruches erhaltene Resultat wenigstens auf so viele Stellen genau, als in der Entwickelung des Bruches $\frac{1}{\nu!\,\nu}$ durch Nullen ausgefüllt werden.

Da die Fehlergränze $\frac{1}{\nu!\,\nu}$ um so kleiner wird, je größer $\nu$ ist, und zwar kleiner gemacht werden kann, als jede beliebige noch so kleine Zahl, so kann man die Annäherung zum wahren Werthe von e so weit treiben, als man will.

Die wirkliche Rechnung gibt:
e=2, 71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 ꝛc.

Wenn also zwei Größen B und K in einem solchen Zusammenhange stehen, daß

$$K = \sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\,(B-1)^r}{r} \text{ ist,}$$

so hat man $B^{\frac{1}{K}} = e$, oder $B = e^K$.

Man sieht zugleich, daß wenn man der Größe B den Werth e beilegt, K in die Einheit übergeht, folglich

$$\sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\,(e-1)^r}{r} = 1 \text{ ist.}$$

116.

Man nehme nun an, e und irgend eine andere von der Einheit verschiedene Zahl E seyen die Grundzahlen zweier Logarithmen-Systeme, und bezeichne die Logarithmen des erstern durch l, die des letztern durch L, welche Buchstaben den diesen Logarithmen zugehörigen Zahlen vorgesetzt werden, so ist, wenn für eine beliebige Zahl B

$$K = \sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\,(B-1)^r}{r}$$

genommen wird, $e^K = B$, also $K = lB$

$$\text{oder } lB = \sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\,(B-1)}{r}$$

Ferner ist, dem Begriffe eines Logarithmus gemäß,

$$E^{LB} = B$$

$$\text{also } l\,(E^{LB}) = lB$$

oder weil in jedem Systeme der Logarithme einer Potenz dem Producte des Exponenten mit dem Logarithmus der Wurzel gleichkommt:

$$LB \,.\, lE = lB$$

$$\text{folglich } LB = \frac{1}{lE}\, lB.$$

Man sieht hieraus, daß die Logarithmen gegebener Zahlen für ein beliebiges System aus den Logarithmen dieser Zahlen in irgend einem andern System abgeleitet werden, wenn man letztere Logarithmen durch den auf dasselbe System bezogenen Logarithmus der Grundzahl des erstern Systems dividirt. Am einfachsten ist es, die Berechnung der Logarithmen eines jeden Systems auf die der Logarithmen für das System, dessen Grundzahl = e ist, zu bauen, und deshalb heißt dieses letztere System das natürliche. Aus besondern Rücksichten wird es von mathematischen Schriftstellern das Neper'sche, wohl auch das hyperbolische Logarithmen-System genannt. Jedes

ſammen r ausmacht. Es läßt ſich demnach jede Combinationsform der (v + 1)ten Klaſſe zur Summe r in zwei Factoren zerfällen, wovon der eine die Form $A_w$ hat, und der andere ein Beſtändtheil von $Cw_v^{r-w}$ $(A_0, A_1 \ldots A_m)$ iſt. Beide Factoren werden in dem combinatoriſchen Aggregate

$$\sum_{1,r}^{w} w A_w \, pCw_v^{r-w} (A_0, A_1, A_2 \ldots A_m)$$

wirklich mit einander multiplicirt, daher erſcheint daſelbſt jede denkbare Combinationsform der (v+1)ten Klaſſe zur Summe r. Da aber jede dieſer Combinationsformen durch die erwähnte Multiplication ſo oft hervorgebracht werden kann, als ſie verſchiedene der Elemente $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ in ſich begreift, und noch überdieß die Permutationszahlen der vſtelligen Complexionen, nebſt den Zeigern der einfachen Elemente, als Factoren in das Spiel kommen, ſo zeigt ſich in dem, nach gehöriger Reduction erhaltenen, Endreſultate des combinatoriſchen Aggregates jede der neu entſtandenen Combinationsformen mit einem, nun näher zu beſtimmenden, Factor verſehen.

Es ſey $A_a^a A_b^b A_c^c \ldots\ldots$ irgend eine Combinationsform der (v + 1)ten Klaſſe zur Summe r, wobei alſo

$$a + b + c + \ldots\ldots = v + 1$$

und $aa + bb + cc + \ldots\ldots = r$ iſt, ſo entſteht dieſelbe durch Multiplication

von $A_a$ mit $A_a^{a-1} A_b^b A_c^c \ldots\ldots$

von $A_b$ mit $A_a^a A_b^{b-1} A_c^c \ldots\ldots$

von $A_c$ mit $A_a^a A_b^b A_c^{c-1} \ldots\ldots$

u. ſ. w.

und bekommt im erſten Falle den Coefficienten

oder $$l\frac{1+x}{1-x} = \sum_{1}^{r}[(-1)^{r-1}+1]\frac{x^r}{r}.$$

Da $(-1)^{r-1}+1$ verschwindet, sobald r gerade ist, so kann man $2r-1$ statt r setzen, in welchem Falle $(-1)^{2r-2}+1=2$ wird, und man hat

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{1}^{r}\frac{x^{2r-1}}{2r-1}.$$

d. h. $$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{ &c.}\right)$$

Es sey $\frac{1+x}{1-x} = z$, so ergibt sich

$$x = \frac{z-1}{z+1}$$

folglich hat man:

$$lz = 2\sum_{1}^{r}\frac{1}{2r-1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2r-1}.$$

Diese Reihe convergirt, sobald statt z eine die Einheit übersteigende positive Zahl gesetzt wird; allein da $z-1$ von $z+1$ nur um zwei Einheiten abweicht, so nehmen die Glieder derselben zu wenig schnell ab, um bei der wirklichen Rechnung eine annehmbare Näherung zu gestatten. Indessen kann man sich durch einen geschickten Gebrauch dieser Reihe oder der mit ihr gleichbedeutenden

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{1}^{r}\frac{x^{2r-1}}{2r-1}$$

die Logarithmen der Primzahlen (auf welche es allein ankommt, da die Logarithmen der übrigen Zahlen aus denselben durch Addition erzeugt werden), mittelst stark convergirender Reihen verschaffen. Setzt man z. B. in der letztern Formel

$x = \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{99}$, so wird

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{50}{49}$$

und man findet für die Logarithmen der Zahlen

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{50}{49}$$

schnell convergirende Ausdrücke.

Nun ist $l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} = l2$

$$l\frac{3}{2} + l2 = l3$$

$$l\frac{5}{4} + 2l2 = l5$$

$$2l5 + l2 - l\frac{50}{49} = l49 \text{ und } \frac{1}{2} l49 = l7$$

u. s. w.

Insbesondere ist $l10 = l2 + l5$, wodurch man leicht zum Werthe von $\frac{1}{l10}$ gelangt, welcher Bruch den Modulus des gemeinen oder Briggischen Systems angibt. Man findet diesen Modulus

$= 0,43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18916\ 60508\ 22943 \ldots$

Er ist offenbar zugleich der Briggische Logarithmus von e.

Setzt man in dem Ausdrucke für $l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\frac{1+x}{1-x} = \frac{z^2}{z^2-1}$, so folgt

$$x = \frac{1}{2z^2-1}$$

daher $l\left(\frac{z^2}{z^2-1}\right) = 2\mathfrak{S}_1^r \frac{1}{(2r-1)(2z^2-1)^{2r-1}}$

oder $lz = \frac{l(z+1)+l(z-1)}{2} + \mathfrak{S}_1^r \frac{1}{(2r-1)(2z^2-1)^{2r-1}}$

eine Formel, welche zur successiven Berechnung der Logarithmen vorzüglich geeignet ist. Ist z eine Primzahl, so sind $z+1$ und $z-1$ durch 2 theilbar, und lassen sich deshalb auf schon früher berechnete Logarithmen zurückführen.

Die hier gegebenen Andeutungen einiger, die Berechnung der Logarithmen erleichternder, Kunstgriffe mögen hinreichen, einen Begriff von der Logarithmotechnie zu verschaffen, welcher übrigens bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis noch viele andere, äußerst wirksame Mittel zu Gebote ständen, wenn es sich um eine Revision der längst berechneten, oder um die Construction neuer Logarithmentafeln handelte.

## 118.

Wir sind nun im Stande, den Logarithmus eines Polynoms von der Form

$$\sum_{o,m}^{r} A_r x^{h+rt}$$

nach den Potenzen der Hauptgröße x zu entwickeln.

Aus dem in 116 Gesagten erhellet, daß wir uns hier bloß auf die Entwickelung natürlicher Logarithmen zu beschränken haben. Es ist

$$\sum_{o,m}^{r} A_r x^{h+rt} = A_o x^h . \sum_{o,m}^{r} \frac{A_r}{A_o} x^{rt} =$$

$$= A_o x^h \left[1 + \sum_{1,m}^{r} \frac{A_r}{A_o} x^{rt}\right]$$

folglich

$$l\left[\sum_{o,m}^{r} A_r x^{h+rt}\right] = l(A_o x^h) + l\left[1 + \sum_{1,m}^{r} \frac{A_r}{A_o} x^{rt}\right]$$

Aber $l(1+x) = \sum_{1}^{w} \frac{(-1)^{w-1} x^w}{w}$, daher wenn man

$\sum_{1,m}^{r} \frac{A_r}{A_o} x^{rt}$ statt x setzt:

$$(\nu+w)! > (\nu+1)!\,(\nu+1)^{w-1} \text{ und}$$

$$\frac{1}{(\nu+w)!} < \frac{1}{(\nu+1)!\,(\nu+1)^{w-1}} \text{ ist,}$$

weniger als

$$\frac{1}{(\nu+1)!}\left(1+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)^2}+\frac{1}{(\nu+1)^3}+\ldots\right)$$

d. h. weniger als

$$\frac{1}{(\nu+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\nu+1}} \text{ oder } \frac{1}{\nu!\,\nu} \quad (98)$$

und es ist folglich das unter der Gestalt eines Decimalbruches erhaltene Resultat wenigstens auf so viele Stellen genau, als in der Entwickelung des Bruches $\frac{1}{\nu!\,\nu}$ durch Nullen ausgefüllt werden.

Da die Fehlergränze $\frac{1}{\nu!\,\nu}$ um so kleiner wird, je größer $\nu$ ist, und zwar kleiner gemacht werden kann, als jede beliebige noch so kleine Zahl, so kann man die Annäherung zum wahren Werthe von e so weit treiben, als man will.

Die wirkliche Rechnung gibt:
e=2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 ꝛc.

Wenn also zwei Größen B und K in einem solchen Zusammenhange stehen, daß

$$K = \sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\,(B-1)^r}{r} \text{ ist,}$$

so hat man $B^{\frac{1}{K}} = e$, oder $B = e^K$.

Man sieht zugleich, daß wenn man der Größe B den Werth e beilegt, K in die Einheit übergeht, folglich

$$\sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}\,(e-1)^r}{r} = 1 \text{ ist.}$$

welche Formel $T_r$ durch die vorhergehenden Coefficienten $T_1$, $T_2$, $T_3$ . . . $T_{r-1}$ angibt.

## 119.

In dem bisher Vorgetragenen ist die Entwickelung der Exponential-Größen auf den binomischen und polynomischen Lehrsatz gegründet worden: allein es dürfte nicht unzweckmäßig seyn, zu zeigen, wie diese Entwickelung auch unabhängig von der Polynomialformel bewerkstelliget werden kann.

Betrachten wir die Reihe

$$1+\frac{mx}{1}+\frac{m^2x^2}{1.2}+\frac{m^3x^3}{1.2.3}+\frac{m^4x^4}{1.2.3.4}+\text{ꝛc.}=\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r}\frac{m^r x^r}{r!}$$

und setzen wir dieselbe der Kürze wegen $= R_m$, so daß

$$R_m=\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r}\frac{m^r x^r}{r!} \text{ ist,}$$

so hat man, wenn man m mit n verwechselt,

$$R_n=\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r}\frac{n^r x^r}{r!};$$

folglich der in 64 gegebenen Multiplicationsformel gemäß:

$$R_m \cdot R_n=\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r}\left[x^r \mathop{\mathfrak{S}}_{0,r}^{w}\frac{m^w}{w!}\cdot\frac{n^{r-w}}{(r-w)!}\right].$$

Nun ist offenbar

$$\frac{w\,m^w}{w!}=m\cdot\frac{m^{w-1}}{(w-1)!}$$

$$\text{und } \frac{(r-w)n^{r-w}}{(r-w)!}=n\cdot\frac{n^{r-w-1}}{(r-w-1)!}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{n^{r-w}}{(r-w)!}$ die zweite mit $\frac{m^w}{w!}$, so erhält man durch Addition beider:

$$r\cdot\frac{m^w}{w!}\cdot\frac{n^{r-w}}{(r-w)!}=m\cdot\frac{m^{w-1}}{(w-1)!}\cdot\frac{n^{r-w}}{(r-w)!}+n\cdot\frac{m^w}{w!}\cdot\frac{n^{r-1-w}}{(r-1-w)!}$$

Hieraus folgt:

$$r \cdot \overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-w}}{(r-w)!} = m \cdot \overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} \frac{m^{w-1}}{(w-1)!} \cdot \frac{n^{r-w}}{(r-w)!} + n \cdot \overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-1-w}}{(r-1-w)!} \quad \text{(A)}$$

Es ist $\frac{m^{w-1}}{(w-1)!} = \frac{w}{m} \cdot \frac{m^w}{w!}$;

setzt man hier $w = o$, so findet man wegen $o! = 1$ (13)

$$\frac{m^{-1}}{(-1)!} = o$$

Man kann daher in $\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} \frac{m^{w-1}}{(w-1)!} \cdot \frac{n^{r-w}}{(r-w)!}$ das erste Glied unbeachtet lassen, also

$$\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} \frac{m^{w-1}}{(w-1)!} \cdot \frac{n^{r-w}}{(r-w)!} = \overset{w}{\underset{1,r}{\mathfrak{S}}} \frac{m^{w-1}}{(w-1)!} \cdot \frac{n^{r-w}}{(r-w)!}$$

annehmen, welches letztere combinatorische Aggregat auch unter der Gestalt

$$\overset{w}{\underset{o,r-1}{\mathfrak{S}}} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-1-w}}{(r-1-w)!}$$

vorgestellt werden darf.

Setzt man nun

$$\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-w}}{(r-w)!} = S_r,$$

so ist $\overset{w}{\underset{o,r-1}{\mathfrak{S}}} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-1-w}}{(r-1-w)!} = S_{r-1}$.

Auf dieselbe Art findet man

$$\overset{w}{\underset{o,r}{\mathfrak{S}}} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-1-w}}{(r-1-w)!} = \overset{w}{\underset{o,r-1}{\mathfrak{S}}} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-1-w}}{(r-1-w)!} = S_{r-1}$$

Hiedurch verwandelt sich die Gleichung (A) in

$$r S_r = m S_{r-1} + n S_{r-1} = (m+n) S_{r-1}$$

woraus $S_r = \frac{m+n}{r} \cdot S_{r-1}$ folgt.

Nun ist $S_0 = \sum_{0,0}^{w} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-w}}{(r-w)!} = \frac{m^0}{0!} \cdot \frac{n^0}{0!} = 1$,

also $S_1 = \frac{m+n}{1} \cdot S_0 = \frac{m+n}{1}$

$S_2 = \frac{m+n}{2} \cdot S_1 = \frac{(m+n)^2}{1 \cdot 2} = \frac{(m+n)^2}{2!}$

$S_3 = \frac{m+n}{3} \cdot S_2 = \frac{(m+n)^3}{2 ! 3} = \frac{(m+n)^3}{3!}$

$S_4 = \frac{m+n}{4} \cdot S_3 = \frac{(m+n)^4}{3 ! 4} = \frac{(m+n)^4}{4!}$

u. s. w.

und allgemein:

$$S_r = \frac{(m+n)^r}{r!} = \sum_{0,r}^{w} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-w}}{(r-w)!}$$

Es ist also:

$$R_m \cdot R_n = \sum_{0}^{r} \frac{(m+n)^r x^r}{r!}$$

das heißt:

$$R_m \cdot R_n = R_{m+n}.$$

Hieraus folgt

$$R_m \cdot R_n \cdot R_p = R_{m+n} \cdot R_p.$$

Setzt man in obiger Gleichung $m+n$ statt m, und p statt n, so erhält man:

$$R_{m+n} \cdot R_p = R_{m+n+p}$$

daher ist

$$R_m \cdot R_n \cdot R_p = R_{m+n+p}.$$

Auf dieselbe Art ergibt sich

$$R_m \cdot R_n \cdot R_p \cdot R_q = R_{m+n+p} \cdot R_q = R_{m+n+p+q}$$

u. s. w.

Multiplicirt man nun eine Anzahl h von Factoren, deren jeder $= R_m$ ist, so entsteht die Gleichung

$$(R_m)^h = R_{mh}$$

woraus für $m = 1$

$$(R_x)^h = R_h$$

folgt, oder was dasselbe ist:

$$\left[\sum_{0}^{r} \frac{x^r}{r!}\right] = \sum_{0}^{r} \frac{h^r\, x^r}{r!}$$

Setzt man $x = 1$, so geht

$\sum_{0}^{r} \frac{x^r}{r!}$ in $\sum_{0}^{r} \frac{1}{r!}$ über, welches letztere combinatorische Aggregat einen fixen, wegen der Convergenz desselben, mit beliebiger Genauigkeit darstellbaren Werth hat, den man, wie es in dem Vorigen geschehen ist, durch e anzeigen kann. Es ist also

$$e^h = \sum_{0}^{r} \frac{h^r}{r!}$$

Diese Gleichung wird jedoch durch die obigen Schlüsse nur für ganze positive Werthe von h gerechtfertigt, weil diese Größe die Anzahl der mit einander multiplicirten $R_m$ angab, also nothwendig eine ganze positive Zahl ist. Um die Richtigkeit der Gleichung für gebrochene und negative Werthe von h zu beweisen, setze man in der Gleichung

$$(R_m)^h = R_{mh}$$

worin m eines jeden Werthes fähig ist,

$$m = \frac{g}{h}$$

und lasse auch g eine ganze positive Zahl seyn, so wird

$$(R_{\frac{g}{h}})^h = R_g$$

$$\text{also } (R_g)^{\frac{1}{h}} = R_{\frac{g}{h}}$$

$$\text{oder } \left[\sum_{0}^{r} \frac{g^r\, x^r}{r!}\right]^{\frac{1}{h}} = \sum_{0}^{r} \left(\frac{g}{h}\right)^r \frac{x^r}{r!}$$

und wenn $x = 1$ angenommen wird:

$$\left[\sum_{0}^{r} \frac{g^r}{r!}\right]^{\frac{1}{h}} = \sum_{0}^{r} \left(\frac{g}{h}\right)^r \frac{1}{r!}$$

Da aber g eine ganze positive Zahl anzeigt, so ist, wie bereits bewiesen wurde:

$$\sum_{0}^{r} \frac{g^r}{r!} = e^g$$

Daher hat man

$$e^{\frac{g}{h}} = \sum_{0}^{r} \frac{\left(\frac{g}{h}\right)^r}{r!}$$

Es gilt also die obige Gleichung

$$e^h = \sum_{0}^{r} \frac{h^r}{r!}$$

auch, wenn man einen positiven Bruch statt h setzt.

Die Gleichung

$$R_m \cdot R_n = R_{m+n}$$

gibt für $n = -m$

$$R_m \cdot R_{-m} = R_0$$

Allein wie aus der Form des durch $R_m$ vorgestellten Ausdruckes erhellet, ist

$$R_0 = 1,$$

folglich $R_{-m} = \frac{1}{R_m} = R_m^{-1}$

oder $\sum_{0}^{r} \frac{(-m)^r x^r}{r!} = \left[\sum_{0}^{r} \frac{m^r x^r}{r!}\right]^{-1}$

folglich, wenn $x = 1$ ist,

$$\sum_{0}^{r} \frac{(-m)^r}{r!} = \left[\sum_{0}^{r} \frac{m^r}{r!}\right]^{-1}$$

Ist aber m eine ganze positive Zahl oder ein positiver Bruch, so hat man, wie oben gefunden wurde:

$$\sum_{0}^{r} \frac{m^r}{r!} = e^m$$

$$l\left[1+\sum_{1,m}^{r}\frac{A^r}{A_o}x^{rt}\right]=$$

$$=\sum_{1}^{w}\left[\frac{(-1)^{w-1}}{w}\sum_{w,mw}^{r}x^{rt}\,pCw_w^r\left(\frac{A_1}{A_o},\frac{A_2}{A_o},\frac{A_3}{A_o}\cdots\frac{A_m}{A_o}\right)\right]$$

$$=\sum_{1}^{r}\left[x^{rt}\sum_{1,r}^{w}\frac{(-1)^{w-1}}{w}\,pCw_w^r\left(\frac{A_1}{A_o},\frac{A_2}{A_o},\frac{A_3}{A_o}\cdots\frac{A_m}{A_o}\right)\right]$$

Es ist demnach:

$$l\left[\sum_{o,m}^{r}A_r\,x^{h+rt}\right]=l\,(A_o\,x^h)+$$

$$\sum_{1}^{r}\left[x^{rt}\sum_{1,r}^{w}\frac{(-1)^{w-1}}{w}\,pCw_w^r\left(\frac{A_1}{A_o},\frac{A_2}{A_o},\frac{A_3}{A_o}\cdots\frac{A_m}{A_o}\right)\right]$$

In dem besondern Falle, wenn $h=o$ angenommen wird, d. h. wenn der Logarithmus von

$$\sum_{o,m}^{r}A_r\,x^{rt}$$

entwickelt werden soll, läßt sich die Bestimmung der Coefficienten der Potenzen der Hauptgröße im zu suchenden Ausdrucke auch auf recurrirendem Wege vornehmen. Denn es sey

$$l\left[\sum_{o,m}^{r}A_r\,x^{rt}\right]=\sum_{o}^{r}T_r\,x^{rt}=z$$

so muß die Gleichung

$$e^z=\sum_{o,m}^{r}A_r\,x^{rt}$$

bestehen. Man setze nun in 114 e statt B, $A_r$ statt $Q_r$, $T_r$ statt $A_r$, und die Einheit statt K, so erhält man

$$\sum_{1,r}^{w}w\,T_w\,A_{r-w}=r\,A_r,\text{ oder}$$

$$\sum_{1,r-1}^{w}w\,T_w\,A_{r-w}+r\,T_r\,A_o=r\,A_r$$

$$\text{also }T_r=\frac{A_r}{A_o}-\sum_{1,r-1}^{w}\frac{w\,A_{r-w}\,T_w}{r\,A_o}$$

$$\sum_{1}^{r} \frac{(wz)^r}{r!} = \sum_{1}^{r} \binom{w}{r} u^r$$

Nun ist $\binom{w}{r} = \frac{w}{r}\binom{w-1}{r-1}$, folglich

$$\sum_{1}^{r} \frac{w^r z^r}{r!} = \sum_{1}^{r} \frac{w}{r}\binom{w-1}{r-1} u^r,$$

und wenn man beiderseits durch w theilt,

$$\sum_{1}^{r} \frac{w^{r-1} z^r}{r!} = \sum_{1}^{r} \frac{1}{r}\binom{w-1}{r-1} u^r$$

oder $$z + \sum_{2}^{r} \frac{w^{r-1} z^r}{r!} = \sum_{1}^{r} \frac{1}{r}\binom{w-1}{r-1} u^r$$

Man setze nun $w = 0$, so verschwindet

$\sum_{2}^{r} \frac{w^{r-1} z^r}{r!}$, weil in allen Gliedern dieses Aggregates w als Factor vorhanden ist, und

$\binom{w-1}{r-1}$ geht in $\binom{-1}{r-1} = (-1)^{r-1}$ über (89),

daher hat man: $$z = \sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1} u^r}{r}$$

Aber wegen $e^z = 1 + u$ ist

$$z = l(1+u)$$

folglich $$l(1+u) = \sum_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1} u^r}{r}$$

wodurch sich dieselben Resultate ergeben, welche im Verlaufe dieses Kapitels abgeleitet worden sind.

Die oben gefundene Gleichung

$$S_r = \frac{(m+n)^r}{r!} = \sum_{0,r}^{w} \frac{m^w}{w!} \cdot \frac{n^{r-w}}{(r-w)!}$$

führt unmittelbar auf den binomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten. Sie gibt nämlich:

$$(m+n)^r = \sum_{o,r}^{w} \frac{r!}{w!\,(r-w)!}\, m^w\, n^{r-w}$$

Allein es ist

$$\frac{r!}{w!\,(r-w)!} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots[r-(w-1)]}{w!} = \binom{r}{w}$$

folglich $(m+n)^r = \sum_{o,r}^{w} \binom{r}{w}\, m^w\, n^{r-w}$.

Die Gleichung

$$e^{mz} = \sum_{o}^{r} \frac{m^r\, z^r}{r!}$$

hingegen bietet den polynomischen Lehrsatz dar, wenn man

$$m = A_o\, x^h + A_1\, x^{h+t} + A_2\, x^{h+2t} + \text{ꝛc. setzt;}$$

ferner $e^{mz}$ einmal durch die angeführte Gleichung, das andere Mal dadurch entwickelt, daß man $e^{mz}$ als das Product der Factoren

$$e^{A_o x^h z},\quad e^{A_1 x^{h+t} z},\quad e^{A_2 x^{h+2t} z}\ldots \text{u. s. w.}$$

ansieht, deren jedes vor der Multiplication in eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe zu verwandeln ist, und endlich die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von z mit einander vergleicht.

Man sieht hieraus, zumal wenn man auch noch das folgende Kapitel berücksichtigt, daß die Betrachtung der Reihe

$$1 + mx + \frac{m^2x^2}{1.2} + \frac{m^3x^3}{1.2.3} + \frac{m^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

hinreicht, um sich zu allen Fundamentalsätzen des höhern Calculs den Weg zu bahnen.

120.

Die vorhergehenden Betrachtungen ſetzen uns in den Stand, jede Potenz des Ausdruckes

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{x^{h+rt}}{r!}$$

in ihrer einfachſten Form anzugeben.

Es iſt nämlich

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{x^{h+rt}}{r!} = x^h \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{(x^t)^r}{r!} = x^h \cdot e^{x^t}$$

alſo

$$\left[\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{x^{h+rt}}{r!}\right]^n = x^{nh} \cdot e^{nx^t}$$

$$= x^{nh} \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{n^r x^{rt}}{r!}$$

$$= \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{n^r x^{nh+rt}}{r!}$$

Es läßt ſich demnach die Reihe

$$y^m = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{x^{h+rt}}{r!}$$

ſehr leicht umkehren. Die Umkehrungsformel 84 gibt

$$x^n = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{\bullet} \frac{n}{n+st} A_s^{-\left(\frac{n+st}{h}\right)} y^{\frac{m(n+st)}{h}}$$

wobei

$$A_s^{-\left(\frac{n+st}{h}\right)}$$

der dem Zeiger s entſprechende Polynomial-Coefficient für die Potenz $-\left(\frac{n+st}{h}\right)$ des Polynoms

$$\mathfrak{S}_{0}^{r} \frac{x^{h+rs}}{r!} \text{ ist,}$$

also, wie obige Rechnung zeigt:

$$-\binom{n+st}{h} A_s = \frac{(-1)^s (n+st)^s}{s! \cdot h^s}$$

und daher

$$x^n = \mathfrak{S}_{0}^{r} \frac{(-1)^s n(n+st)^{s-1}}{s!\, h^s} y^{\frac{m(n+st)}{h}}$$

# Fünftes Kapitel.

## Ableitung einiger Reihen für goniometrische Größen.

121.

In dem vorigen Kapitel ist allgemein:

$$B^z = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{\nu} \frac{K^\nu z^\nu}{\nu!}$$

gefunden worden, wobei

$$K = \mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}(B-1)^r}{r},$$

den natürlichen Logarithmus von B bedeutet.

Nehmen wir $B = e =$ der Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, so geht K in die Einheit über, und es wird

$$e^z = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{\nu} \frac{z^\nu}{\nu!}$$

Diese Formel bietet, sobald z einen imaginären Werth von der Form $x\sqrt{-1}$ erhält, wobei x eine reelle Größe anzeigt, höchst merkwürdige Ausdrücke dar, deren Beschaffenheit näher zu untersuchen wir uns gegenwärtig vornehmen.

Von je zwei aufeinanderfolgenden Werthen des Zeigers $\nu$ ist einer gerade, der andere ungerade. Alle Werthe der erstern Art gehen aus der Form $2r$, alle Werthe der letztern Art aber aus der Form $2r+1$ für $r = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ hervor.

Daher ist

$$e^z = \overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \frac{z^{2r}}{(2r)!} + \overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \frac{z^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

Es sey nun $z = x\sqrt{-1}$, so ergibt sich wegen

$$(\sqrt{-1})^{2r} = (-1)^r$$

und $(\sqrt{-1})^{2r+1} = (\sqrt{-1})^{2r} . \sqrt{-1} = (-1)^r \sqrt{-1}$

$$e^{x\sqrt{-1}} = \overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!} + \sqrt{-1} \overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.}$$

durch $M_x$ und

$$\overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!} = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$$

durch $N_x$ andeutet,

$$e^{x\sqrt{-1}} = M_x + N_x \sqrt{-1}.$$

Die Größen $M_x$ und $N_x$ sind beide reell. Es convergiren nämlich die Reihen, wodurch diese Größen ausgedrückt werden, für jeden Werth von x, weil die Glieder derselben, von demjenigen angefangen, in welchem der letzte Factor des Nenners, z. B. w, die Zahl x übersteigt, kleiner sind, als die Glieder einer convergirenden geometrischen Progression, welche mit $\frac{x^w}{w!}$ anfängt, und den echten Bruch $\frac{x^2}{(w+1)(w+2)}$ zum Quotienten hat (99); die Größen $M_x$ und $N_x$ lassen sich daher mit beliebiger Schärfe näherungsweise berechnen, und haben folglich reelle Werthe.

122.

Die Gleichung $e^{x\sqrt{-1}} = M_x + N_x \sqrt{-1}$ führt zu geschlossenen Ausdrücken für die Größen $M_x$ und $N_x$, aus welchen

sich sogleich, mit Hülfe einer leichten Rechnung, Eigenschaften der genannten Größen ergeben, welche die Natur derselben in ein helleres Licht setzen.

Wird nämlich x negativ genommen, so bleibt $M_x$, da es bloß Potenzen von x mit geraden Exponenten enthält, unverändert; $N_x$ hingegen, worin sich bloß ungerade Exponenten zeigen, verwandelt sich in $-N_x$, daher ist

$$e^{-x\sqrt{-1}} = M_x - N_x\sqrt{-1}$$

$$\text{also } M_x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$N_x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Erhebt man erstlich beide Ausdrücke zum Quadrate, so findet man:

$$M_x^2 = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + 2 + e^{-2x\sqrt{-1}}}{4}$$

$$N_x^2 = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 2 + e^{-2x\sqrt{-1}}}{-4}$$

woraus $M_x^2 + N_x^2 = 1$ folgt, d. h. die Summe der Quadrate der beiden Größen $M_x$, $N_x$ ist, für jeden Werth von x, der Einheit gleich.

Vertauscht man ferner x mit y, so hat man

$$M_y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2}, \quad N_y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

folglich

$$M_x . M_y = \frac{e^{(x+y)\sqrt{-1}} + e^{-(x+y)\sqrt{-1}} + e^{(x-y)\sqrt{-1}} + e^{-(x-y)\sqrt{-1}}}{4}$$

$$N_x . N_y = \frac{e^{(x+y)\sqrt{-1}} + e^{-(x+y)\sqrt{-1}} - e^{(x-y)\sqrt{-1}} - e^{-(x-y)\sqrt{-1}}}{-4}$$

$$M_x . N_y = \frac{e^{(x+y)\sqrt{-1}} - e^{-(x+y)\sqrt{-1}} - e^{(x-y)\sqrt{-1}} + e^{-(x-y)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$$

$$N_x . M_y = \frac{e^{(x+y)\sqrt{-1}} - e^{-(x+y)\sqrt{-1}} + e^{(x-y)\sqrt{-1}} - e^{-(x-y)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$$

welche Gleichungen deutlich zeigen, daß

$$2\,M_x M_y = M_{x+y} + M_{x-y}$$
$$2\,N_x N_y = M_{x-y} - M_{x+y}$$
$$2\,M_x N_y = N_{x+y} - N_{x-y}$$
$$2\,N_x M_y = N_{x+y} + N_{x-y} \text{ ist.}$$

Hieraus erhält man:

$$M_{x+y} = M_x M_y - N_x N_y$$
$$M_{x-y} = M_x M_y + N_x N_y$$
$$N_{x+y} = N_x M_y + M_x N_y$$
$$N_{x-y} = N_x M_y - M_x N_y$$

Auch ist

$$M_0 = 1, \quad N_0 = 0,$$

wie sowohl aus den Reihen, welche wir durch $M_x$ und $N_x$ vorgestellt haben, als auch aus den für diese Größen gefundenen geschlossenen Ausdrücken erkannt wird, wenn man daselbst $x=0$ setzt.

123.

Diese Eigenschaften der Größen $M_x$, $N_x$ haben eine auffallende Aehnlichkeit mit jenen, welche in den Elementen der Trigonometrie für die Sinusse und Cosinusse der Winkel oder Bogen, in Bezug auf den Halbmesser 1, erwiesen werden.

Es sey nämlich X die Zahl, welche das Verhältniß eines Winkels oder des mit dem Halbmesser 1 aus seinem Scheitel zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Kreisbogens zur entsprechenden Einheit angibt*), so ist bekanntermaßen:

$$(\cos X)^2 + (\sin X)^2 = 1.$$

---

*) Da sich zwei Winkel wie die aus ihren Scheiteln zwischen ihren Schenkeln mit gleichen Halbmessern beschriebenen Kreisbogen verhalten, so können correspondirende Winkel und Bogen durch einerlei Zahlen vorgestellt werden. Dieß heißt jenen Winkel zur Einheit der Winkel wählen, dessen Bogen der Längen-Einheit gleichkommt. Ist also der Halbmesser, mit welchem die

Stellt ferner Y irgend einen andern Winkel oder Bogen vor, so ist

$$\cos (X + Y) = \cos X \cos Y - \sin X \sin Y$$
$$\cos (X - Y) = \cos X \cos Y + \sin X \sin Y$$
$$\sin (X + Y) = \sin X \cos Y + \cos X \sin Y$$
$$\sin (X - Y) = \sin X \cos Y - \cos X \sin Y$$

Auch ist $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

Vergleicht man die hier angeführten Relationen der goniometrischen Größen mit jenen, welche zwischen den Größen von der Form $M_x$, $N_x$ bestehen, so sieht man sogleich, daß letztere Größen den Cosinus und den Sinus eines von x abhängenden, mit x zugleich verschwindenden, und nun näher zu bestimmenden Bogens ausdrücken.

In der That, da die Sinusse und Cosinusse überhaupt jeder zwischen Null und dem zugehörigen Halbmesser liegenden Größe, sowohl im positiven als auch im negativen Sinne, fähig sind, so kann man von zwei reellen Größen, $M_x$, $N_x$, deren Quadrate zusammenaddirt die Einheit geben, die eine als den Sinus, die andere als den Cosinus unzähliger, mit dem Halbmesser 1 beschriebener, Bogen betrachten, deren Unterschiede Vielfache der ganzen Peripherie sind. Es sey $Q_x$ einer dieser Bogen, welcher mit x in einem solchen Zusammenhange stehe, daß für $x = 0$ auch $Q_x = 0$ wird; ferner sey

$$M_x = \cos Q_x, \quad N_x = \sin Q_x$$

so ist auch, wenn man y statt x schreibt,

$$M_y = \cos Q_y, \quad N_y = \sin Q_y$$

folglich $M_x M_y = \cos Q_x \cos Q_y$, $N_x N_y = \sin Q_x \sin Q_y$

und $M_x M_y - N_x N_y = \cos Q_x \cos Q_y - \sin Q_x \sin Q_y$

---

Bogen beschrieben werden, die Längen-Einheit selbst, so gilt derjenige Winkel für die Einheit der Winkel, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist.

Aber es ist (122) $M_x M_y - N_x N_y = M_{x+y}$ und obiger Annahme gemäß, wenn man $x + y$ statt $x$ schreibt,

$$M_{x+y} = \cos Q_{x+y};$$

ferner $\cos Q_x \cos Q_y - \sin Q_x \sin Q_y = \cos (Q_x + Q_y)$

folglich $\cos Q_{x+y} = \cos (Q_x + Q_y)$

Obschon im Allgemeinen von der Gleichheit der Cosinusse der Bogen $Q_{x+y}$ und $Q_x + Q_y$ nicht auf die Gleichheit dieser Bogen geschlossen werden kann, so darf man doch hier, der oben erwähnten Unbestimmtheit genannter Bogen zufolge,

$$Q_{x+y} = Q_x + Q_y$$

setzen, aus welcher Gleichung die Art der Abhängigkeit der Größe $Q_x$ von $x$ durch folgende Schlüsse erkannt wird.

Es ist dieser Gleichung gemäß:

$$Q_{x+y+z} = Q_{x+y} + Q_z = Q_x + Q_y + Q_z$$

ferner $Q_{x+y+z+u} = Q_{x+y+z} + Q_u = Q_x + Q_y + Q_z + Q_u$

u. s. w.

und allgemein

$$Q_{x+y+z+u+\text{&c.}} = Q_x + Q_y + Q_z + Q_u + \text{&c.}$$

Es sey nun $x = y = z = u = \text{&c.}$ und die Anzahl dieser Größen $= g$, so hat man

$$Q_{gx} = g\, Q_x$$

eine Gleichung, in welcher $x$ jeden beliebigen Werth erhalten darf, $g$ aber nothwendig eine ganze positive Zahl bedeutet.

Diese Gleichung besteht aber auch für gebrochene und negative Werthe von $g$.

Man setze nämlich $\frac{x}{g}$ statt $x$, so ergibt sich

$$Q_x = g\, Q_{\frac{x}{g}}$$

$$\text{und } Q_{\frac{x}{g}} = \frac{1}{g} Q_x.$$

Setzt man ferner in der Gleichung $Q_{gx} = g\,Q_x$, f statt g, und $\frac{x}{g}$ statt x, so wird $Q_{f\frac{x}{g}} = fQ_{\frac{x}{g}}$; daher erhält man

$$Q_{f\frac{x}{g}} = \frac{f}{g}\,Q_{\frac{x}{g}}$$

Es besteht also obige Gleichung, wenn man den positiven Bruch $\frac{f}{g}$ statt g setzt.

Es sey endlich in der Gleichung

$$Q_{x+y} = Q_x + Q_y$$

$y = -x$, so folgt $Q_0 = Q_x + Q_{-x}$.

Aber $Q_0$ ist gleich Null, weil die angeführte Gleichung für

$$x = 0,\ y = 0$$

$Q_0 = Q_0 + Q_0 = 2\,Q_0$ gibt,

was mit dem bereits oben Gesagten im Einklange steht; daher hat man

$$Q_{-x} = -Q_x, \text{ und}$$
$$Q_{-gx} = -Q_{gx}.$$

Aber es ist, g mag eine ganze oder eine gebrochene positive Zahl seyn,

$$Q_{gx} = g\,Q_x, \text{ folglich}$$
$$Q_{-gx} = -g\,Q_x,$$

d. h. die Gleichung $Q_{gx} = g\,Q_x$ gilt auch für negative Werthe von g.

Verbindet man mit den hier angestellten Betrachtungen den gewöhnlichen Schluß vom Commensurablen auf das Incommensurable, so kann man die erwähnte Gleichung auch für incommensurable Werthe von g zulassen.

Es ist also überhaupt für jedes x und y:

$$Q_{xy} = x\,Q_y,$$

folglich, wenn man $y = 1$ annimmt:

$$Q_x = x\,Q_1$$

Aber $Q_x$ ist eine völlig bestimmte, also von x nicht abhängende Größe, welche wir durch c anzeigen wollen, daher ist

$$Q_x = cx$$

folglich $M_x = \cos cx$, und $N_x = \sin cx$.

124.

Um über die Bedeutung der von x unabhängigen Größe c zu entscheiden, müssen wir die Reihen, welche wir der Kürze wegen durch $M_x$ und $N_x$ angedeutet haben (121), in Erwägung ziehen. Es ist

$$M_x = \sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!} \text{ und } N_x = \sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!};$$

folglich haben wir

$$\cos cx = \sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!} \text{ und } \sin cx = \sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

Jede dieser Gleichungen verhilft uns zur Kenntniß des Werthes von c. Wir wollen unserer Untersuchung die zweite Gleichung zum Grunde legen.

Offenbar reicht es hin, c unter der Voraussetzung, daß x was immer für besondere Werthe erhalte, zu bestimmen; denn c richtet sich gar nicht nach den Werthen von x.

Nehmen wir an, x bekomme bloß solche Werthe, für welche der Bogen cx kleiner wird, als der vierte Theil der Kreisperipherie, so ist, wie aus einfachen geometrischen Betrachtungen erhellet, der Sinus dieses Bogens kleiner, hingegen die Tangente desselben größer, als der Bogen selbst, nämlich

$$\sin cx > cx,$$

$$\text{und } \operatorname{tg} cx \text{ oder } \frac{\sin cx}{\cos cx} \text{ oder } \frac{\sin cx}{\sqrt{[1-(\sin cx)^2]}} > cx.$$

Letztere Vergleichung gibt

$$\sin cx > cx\sqrt{[1-(\sin cx)^2]}$$

d. h. $(\sin cx)^2 > c^2x^2[1-(\sin cx)^2]$

und $(\sin cx)^2[1+c^2x^2] > c^2x^2$

folglich $\sin cx > \frac{cx}{\sqrt{(1+c^2x^2)}}$

Betrachten wir nun zwei unmittelbar auf einanderfolgende Glieder der Reihe

$$\sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

z. B. diejenigen, welche den Zeigern $r-1$ und $r$ entsprechen.

Ihre Summe ist $= \frac{(-1)^{r-1} x^{2r-1}}{(2r-1)!} + \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}$,

welche wegen $(2r+1)! = (2r-1)!\, 2r(2r+1)$ auf die Gestalt

$$\frac{(-1)^{r-1} x^{2r-1}}{(2r-1)!} \left(1 - \frac{x^2}{2r(2r+1)}\right)$$

gebracht werden kann.

Lassen wir nun unter den Werthen von $x$, für welche $cx$ kleiner ausfällt, als der vierte Theil der Kreisperipherie, nur jene zu, für welche zugleich

$x^2 < 2r(2r+1)$ oder $x < \sqrt{[2r(2r+1)]}$ ist,

so wird der Unterschied

$$1 - \frac{x^2}{2r(2r+1)}$$

positiv, und es richtet sich daher das Zeichen der Summe der beiden obigen Glieder nach dem Zeichen des vordern Gliedes.

Da $r$ wächst, je weiter wir in der erwähnten Reihe fortschreiten, so wird die Bedingung $x < \sqrt{[2r(2r+1)]}$ für alle folgenden Paare ihrer Glieder erfüllt, wenn sie für ein vorhergehendes Paar Statt findet.

Nehmen wir also von irgend einer Stelle der Reihe

$$\sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

z. B. von der $r$ten angefangen, alle Glieder paarweise zusammen, und setzen wir $x < \sqrt{[2r(2r+1)]}$, so stimmt das Zeichen der Summe aller dieser Glieder mit jenem des $r$ten Gliedes überein.

Hieraus erhellet, daß sobald $x < \sqrt{2.3}$ oder $x < \sqrt{6}$ angenommen wird, alle auf das erste Glied der Reihe

$$\sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

folgenden Glieder zusammenaddirt eine negative, und alle auf das zweite Glied folgenden eine positive Summe geben; daß also der Betrag der ganzen Reihe kleiner, als das erste Glied $x$, und größer als die Summe der beiden ersten Glieder $x - \frac{x^3}{6}$ seyn müsse.

Wir haben somit, bei der vorausgesetzten Beschränkung der Werthe von $x$,

$$\sin cx < x \text{ und } \sin cx > x - \frac{x^3}{6}$$

Wie wir oben bemerkten, ist

$$cx > \sin cx$$

und hier finden wir $\sin cx > x - \frac{x^3}{6}$; folglich ist um so mehr

$$cx > x - \frac{x^3}{6} \text{ oder } c > 1 - \frac{x^2}{6}$$

Ferner ergab sich oben $\frac{cx}{\sqrt{(1+c^2x^2)}} < \sin cx$

und hier ist $\sin cx < x$; folglich ist um so mehr

$$\frac{cx}{\sqrt{(1+c^2x^2)}} < x \text{ oder } c < \sqrt{(1+c^2x^2)}$$

Aus diesen Vergleichungen wird nun ersichtlich, daß $c$ nur der Einheit gleich seyn kann.

Denn wäre $c < 1$ also $c = 1 - \delta$ wobei $\delta$ eine völlig bestimmte positive Größe anzeigt, so hätten wir, wegen $c > 1 - \frac{x^2}{6}$ auch

$1 - \delta > 1 - \frac{x^2}{6}$; folglich $\delta < \frac{x^2}{6}$ und $x > \sqrt{6\delta}$.

Es könnte also x nicht kleiner werden, als $\sqrt{6\delta}$, was der Natur jener veränderlichen Größe, deren Abnehmen wir oben gar nicht eingeschränkt haben, widerstreitet.

Wäre hingegen $c > 1$, also $c = 1 + \delta$, wobei $\delta$ in demselben Sinne genommen wird, wie oben, so hätten wir, wegen

$$c < \sqrt{(1+c^2x^2)}, \text{ auch } 1+\delta < \sqrt{(1+c^2x^2)},$$

$$\text{folglich } x > \frac{1}{c}\sqrt{[(1+\delta)^2-1]},$$

was wieder ungereimt ist.

Es kann also c weder kleiner noch größer, als die Einheit, angenommen werden. Aber c ist eine reelle Größe, folglich muß $c = 1$ seyn.

Wir gelangen daher, durch die hier angestellte Untersuchung, zu folgenden merkwürdigen Resultaten:

Es ist

$$\sin x = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\text{und } e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

wobei das Zeichen der Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ auch verändert werden kann, was eben so viel bewirkt, als die Aenderung des Zeichens von x.

125.

Diese Formeln, welche den Sinus und Cosinus durch den Bogen darstellen, setzen uns in den Stand, auch die Tangente und die Cotangente durch den entsprechenden Bogen auszudrücken.

Es ist nämlich

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} = \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!} : \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!}$$

Wird die Division, nach der Formel in 104 verrichtet, so ergibt sich:

Hieraus erhellet, daß sobald $x < \sqrt{2.3}$ oder $x < \sqrt{6}$ angenommen wird, alle auf das erste Glied der Reihe

$$\mathfrak{S}_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

folgenden Glieder zusammenaddirt eine negative, und alle auf das zweite Glied folgenden eine positive Summe geben; daß also der Betrag der ganzen Reihe kleiner, als das erste Glied $x$, und größer als die Summe der beiden ersten Glieder $x - \frac{x^3}{6}$ seyn müsse.

Wir haben somit, bei der vorausgesetzten Beschränkung der Werthe von $x$,

$$\sin cx < x \text{ und } \sin cx > x - \frac{x^3}{6}$$

Wie wir oben bemerkten, ist

$$cx > \sin cx$$

und hier finden wir $\sin cx > x - \frac{x^3}{6}$; folglich ist um so mehr

$$cx > x - \frac{x^3}{6} \text{ oder } c > 1 - \frac{x^2}{6}$$

Ferner ergab sich oben $\frac{cx}{\sqrt{(1+c^2x^2)}} < \sin cx$

und hier ist $\sin cx < x$; folglich ist um so mehr

$$\frac{cx}{\sqrt{(1+c^2x^2)}} < x \text{ oder } c < \sqrt{(1+c^2x^2)}$$

Aus diesen Vergleichungen wird nun ersichtlich, daß $c$ nur der Einheit gleich seyn kann.

Denn wäre $c < 1$ also $c = 1 - \delta$ wobei $\delta$ eine völlig bestimmte positive Größe anzeigt, so hätten wir, wegen $c > 1 - \frac{x^2}{6}$ auch

$1 - \delta > 1 - \frac{x^2}{6}$; folglich $\delta < \frac{x^2}{6}$ und $x > \sqrt{6\delta}$.

Es könnte also x nicht kleiner werden, als $\sqrt{6\delta}$, was der Natur jener veränderlichen Größe, deren Abnehmen wir oben gar nicht eingeschränkt haben, widerstreitet.

Wäre hingegen $c > 1$, also $c = 1 + \delta$, wobei $\delta$ in demselben Sinne genommen wird, wie oben, so hätten wir, wegen

$$c < \sqrt{(1+c^2x^2)}, \text{ auch } 1+\delta < \sqrt{(1+c^2x^2)},$$

$$\text{folglich } x > \frac{1}{c}\sqrt{[(1+\delta)^2-1]},$$

was wieder ungereimt ist.

Es kann also c weder kleiner noch größer, als die Einheit, angenommen werden. Aber c ist eine reelle Größe, folglich muß $c = 1$ seyn.

Wir gelangen daher, durch die hier angestellte Untersuchung, zu folgenden merkwürdigen Resultaten:

Es ist

$$\sin x = \sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\text{und } e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

wobei das Zeichen der Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ auch verändert werden kann, was eben so viel bewirkt, als die Aenderung des Zeichens von x.

125.

Diese Formeln, welche den Sinus und Cosinus durch den Bogen darstellen, setzen uns in den Stand, auch die Tangente und die Cotangente durch den entsprechenden Bogen auszudrücken.

Es ist nämlich

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!} : \sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!}$$

Wird die Division, nach der Formel in 104 verrichtet, so ergibt sich:

Hieraus erhellet, daß sobald $x < \sqrt{2.3}$ oder $x < \sqrt{6}$ angenommen wird, alle auf das erste Glied der Reihe

$$\sum_{0}^{r} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

folgenden Glieder zusammenaddirt eine negative, und alle auf das zweite Glied folgenden eine positive Summe geben; daß also der Betrag der ganzen Reihe kleiner, als das erste Glied $x$, und größer als die Summe der beiden ersten Glieder $x - \frac{x^3}{6}$ seyn müsse.

Wir haben somit, bei der vorausgesetzten Beschränkung der Werthe von $x$,

$$\sin cx < x \text{ und } \sin cx > x - \frac{x^3}{6}$$

Wie wir oben bemerkten, ist

$$cx > \sin cx$$

und hier finden wir $\sin cx > x - \frac{x^3}{6}$; folglich ist um so mehr

$$cx > x - \frac{x^3}{6} \text{ oder } c > 1 - \frac{x^2}{6}$$

Ferner ergab sich oben $\frac{cx}{\sqrt{(1+c^2x^2)}} < \sin cx$

und hier ist $\sin cx < x$; folglich ist um so mehr

$$\frac{cx}{\sqrt{(1+c^2x^2)}} < x \text{ oder } c < \sqrt{(1+c^2x^2)}$$

Aus diesen Vergleichungen wird nun ersichtlich, daß $c$ nur der Einheit gleich seyn kann.

Denn wäre $c < 1$ also $c = 1 - \delta$ wobei $\delta$ eine völlig bestimmte positive Größe anzeigt, so hätten wir, wegen $c > 1 - \frac{x^2}{6}$ auch

$1 - \delta > 1 - \frac{x^2}{6}$; folglich $\delta < \frac{x^2}{6}$ und $x > \sqrt{6\delta}$.

$$= l\left[\frac{1+\sqrt{-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\sqrt{-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}\right] = l\left(\frac{1+\sqrt{-1}\cdot tg\,x}{1-\sqrt{-1}\cdot tg\,x}\right)$$

Es sey $tg\,x = z$, so besteht, wenn man, dem gewöhnlichen Schreibgebrauche gemäß, den Bogen x, dessen Tangente z ist, durch Arc.tg z anzeigt, die Gleichung:

$$Arc.tg\,z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)$$

Wird der Logarithmus nach 117 in eine Reihe umgesetzt, so erhält man:

$$Arc.tg\,z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot 2\sum_{0}^{r}\frac{(z\sqrt{-1})^{2r+1}}{2r+1}$$

welcher Ausdruck, wegen $(\sqrt{-1})^{2r+1} = (-1)^r\sqrt{-1}$ in

$$Arc.tg\,z = \sum_{0}^{r}\frac{(-1)^r\,z^{2r+1}}{2r+1}$$ übergeht.

Es ist demnach

$$Arc.tg\,z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \text{ꝛc.}$$

127.

Stellt man den Sinus eines Bogens, dessen Tangente z ist, durch u vor, so ist der Cosinus desselben Bogens

$= \sqrt{(1-u^2)}$, folglich $z = \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)}}$ und

$$Arc.\sin u = Arc.tg\,z = Arc.tg\,\frac{u}{\sqrt{(1-u^2)}}.$$

Entwickelt man $Arc.tg\,\frac{u}{\sqrt{(1-u^2)}}$ nach 126, so erhält man:

$$Arc.\sin u = \sum_{0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\left(\frac{u}{\sqrt{(1-u^2)}}\right)^{2r+1}$$

Der binomische Lehrsatz gibt:

$$\left(\frac{u}{\sqrt{(1-u)^2}}\right)^{2r+1} = u^{2r+1}(1-u^2)^{-\frac{2r+1}{2}}$$

$$= u^{2r+1} \sum_{0}^{w} (-1)^w \binom{-\frac{2r+1}{2}}{w} u^{2w}$$

$$= \sum_{\bullet}^{w} (-1)^w \binom{-\frac{2r+1}{2}}{w} u^{2(r+w)+1}$$

daher ist

$$\text{Arc.sin } u = \sum_{0}^{r} \left[\frac{(-1)^r}{2r+1} \sum_{0}^{w} (-1)^w \binom{-\frac{2r+1}{2}}{w} u^{2(r+w)+1}\right]$$

Es sey $r+w=v$, so hat man, wenn man statt des Zeigers w den Zeiger v einführt:

$$\text{Arc.sin } u = \sum_{0}^{v} \left[(-1)^v u^{2v+1} \sum_{0,v}^{r} \frac{1}{2r+1} \binom{-\frac{2r+1}{2}}{v-r}\right]$$

Nach 89 ist $\binom{-\frac{2r+1}{2}}{v-r} = (-1)^{v-r}\binom{\frac{2r+1}{2}+v-r-1}{v-r}$

$$= (-1)^{v-r}\binom{\frac{2v-1}{2}}{v-r}$$

ferner $\binom{\frac{2v-1}{2}}{v-r} = \frac{2r+1}{v+12}\binom{\frac{2v+1}{2}}{v-r}$

wie man leicht sieht, wenn man statt der Symbole die durch dieselben angedeuteten Binomial Coefficienten selbst setzt,

folglich $\frac{1}{2r+1}\binom{-\frac{2r+1}{2}}{v-r} = \frac{(-1)^{v-r}}{2v+1}\binom{\frac{2v+1}{2}}{v-r}$

und wegen $(-1)^{-r} = (-1)^r$

$$\sum_{\bullet,v}^{r} \frac{1}{2r+1}\binom{-\frac{2r+1}{2}}{v-r} = \frac{(-1)^v}{2v+1} \sum_{0,v}^{r} (-1)^r \binom{\frac{2v+1}{2}}{v-r}$$

$$= \frac{(-1)^v}{2v+1}\binom{\frac{2v-1}{2}}{v} \text{ (93).}$$

Substituirt man dieses Resultat in den letzten Ausdruck für Arc. sin u, so findet man endlich:

$$\text{Arc.sin } u = \sum_{\bullet}^{v} \frac{1}{2v+1}\binom{\frac{2v-1}{2}}{v} u^{2v+1}$$

Es ist nämlich:

$$\text{Arc sin } u = u + \frac{1}{2.3}u^3 + \frac{1.3}{2.4.5}u^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}u^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}u^9 + \text{ &c.}$$

128.

Setzt man in der Gleichung

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$$

$nx$ statt $x$, wobei $n$ was immer für eine Zahl anzeigt, so hat man

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx$$

Aber es ist $e^{nx\sqrt{-1}} = (e^{x\sqrt{-1}})^n$ folglich:

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx.$$

Diese merkwürdige Gleichung kann man die goniometrische Binomialformel nennen. Sie gilt, wie man sieht, für jeden Werth des Exponenten $n$, und dient vorzüglich dazu, $\sin nx$ und $\cos nx$ durch $\sin x$ und $\cos x$ auszudrücken.

Ehe wir zu den diesem Zwecke zustrebenden Rechnungen fortschreiten, müssen wir auf die Vorsicht aufmerksam machen, welche der Gebrauch einer Potenz, wie

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n$$

wenn $n$ jede Zahl vorstellt, im Calcul erheischt.

Diese Potenz ist nämlich, sobald $n$ keinen ganzen, positiven oder negativen Werth annimmt, vieldeutig.

Die Gleichung

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx$$

besteht, wie aus ihrem Ursprunge erhellet, für jeden Werth des Bogens $x$, folglich auch, wenn man statt $x$ einen andern Bogen setzt, welcher von dem erstern im positiven oder negativen Sinne um ein Vielfaches der ganzen Kreisperipherie verschieden ist. Aber dann fallen sowohl die Sinusse, als auch die Cosinusse beider Bogen zusammen; folglich hat man, wenn $\pi$ die Hälfte der Kreisperipherie für den Halbmesser 1, oder was

daſſelbe iſt, den Quotienten jeder durch den zugehörigen Durchmeſſer getheilten Kreisperipherie anzeigt, und r eine ganze poſitive oder negative Zahl vorſtellt, die Gleichung

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^n = \\ = \cos n(2r\pi + x) \pm \sqrt{-1} \sin n(2r\pi + x).$$

Aber die Werthe von $\cos n(2r\pi + x)$, $\sin n(2r\pi + x)$ ſind, wenn r veränderlich gedacht wird, und n keine ganze Zahl iſt, ebenfalls veränderlich; es iſt alſo, wenn n keine ganze Zahl bedeutet, $(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^n$ vieldeutig.

Da wir uns hier nicht mit der Aufſuchung der Mittel beſchäftigen wollen, durch welche die Mißgriffe beſeitiget werden können, die man im Calcul zu begehen Gefahr läuft, wenn man die erwähnte Unbeſtimmtheit des Ausdruckes

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^n,$$

welche derſelbe mit allen Potenzen, deren Exponenten keine ganzen Zahlen ſind, gemein hat, außer Acht läßt; ſo erklären wir ausdrücklich, daß im Folgenden der Exponent oder Multiplicator n bloß eine ganze poſitive oder negative Zahl bedeuten ſoll.

129.

Dem binomiſchen Lehrſatze zufolge iſt:

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n = \sum_{0}^{r} \binom{n}{r} \cos x^{n-r} (\sqrt{-1})^r \sin x^r$$

folglich, wenn man zugleich die Glieder, welche den geraden Zeigerwerthen entſprechen, von jenen, welche den ungeraden Zeigerwerthen gehören, abſondert:

$$\cos nx + \sqrt{-1} \sin nx = \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r} \cos x^{n-2r} \sin x^{2r}$$

$$+ \sqrt{-1} \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \cos x^{n-(2r+1)} \sin x^{2r+1}$$

Aendert man das Zeichen von $\sqrt{-1}$, ſo erhält man eine neue Gleichung, welche zu der erſtern addirt, und von derſel-

ben ſubtrahirt, nach Wegſchaffung der gemeinſchaftlichen Factoren 2 und $2\sqrt{-1}$,

$$\cos n x = \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r} \cos x^{n-2r} \sin x^{2r}$$

und $$\sin n x = \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \cos x^{n-(2r+1)} \sin x^{2r+1}$$

gibt. Dieſer Schritt iſt es, welcher wegen der Vieldeutigkeit der Potenzen zum Irrthume verleitet, wenn n keinen ganzen Werth hat. Iſt n eine ganze poſitive Zahl, ſo führen obige Formeln zu geſchloſſenen Ausdrücken für den Sinus und Coſinus des Vielfachen eines Winkels durch den Sinus und Coſinus des einfachen; iſt n negativ, ſo bieten ſie bloß unendliche Reihen dar.

Für $n = 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ findet man:

$\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2$
$\cos 3x = \cos x^3 - 3 \cos x \sin x^2$
$\cos 4x = \cos x^4 - 6 \cos x^2 \sin x^2 + \sin x^4$
$\cos 5x = \cos x^5 - 10 \cos x^3 \sin x^2 + 5 \cos x \sin x^4$
$\cos 6x = \cos x^6 - 15 \cos x^4 \sin x^2 + 15 \cos x^2 \sin x^4 - \sin x^6$

u. ſ. w.

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\sin 3x = 3 \cos x^2 \sin x - \sin x^3$
$\sin 4x = 4 \cos x^3 \sin x - 4 \cos x \sin x^3$
$\sin 5x = 5 \cos x^4 \sin x - 10 \cos x^2 \sin x^3 + \sin x^5$
$\sin 6x = 6 \cos x^5 \sin x - 20 \cos x^3 \sin x^3 + 6 \cos x \sin x^5$

u. ſ. w.

130.

Da jedoch der Sinus jedes Bogens durch den Coſinus, und umgekehrt, der Coſinus durch den Sinus gegeben iſt, ſo bringt ſich die Forderung auf, sin n x ſowohl durch cos x allein, als auch durch sin x allein, darzuſtellen.

Dieſer Zweck wird erreicht, wenn man

$$\cos nx \pm \sqrt{-1} \cdot \sin nx = (\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^n$$

nach geſchehener Subſtitution

$\sin x = \sqrt{(1-\cos x^2)}$ oder $\cos x = \sqrt{(1-\sin x^2)}$ mittelſt des binomiſchen Lehrſatzes entwickelt, und nach Potenzen von cos x oder von sin x ordnet.

Wir wollen gegenwartig den Ausdruck

$$\cos n x + \sqrt{-1}\sin n x = [\cos x + \sqrt{(\cos x^2 - 1)}]^n$$

in eine nach den Potenzen von cos x fortſchreitende Reihe verwandeln.

Der binomiſche Lehrſatz gibt:

$$[\cos x + \sqrt{(\cos x^2 - 1)}]^n = \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \cos x^{n-r} (\cos x^2 - 1)^{\frac{r}{2}}$$

Um jedoch der Form des Reſultates eine für die Folge nöthige Allgemeinheit zu ertheilen, wollen wir den zweiten Theil dieſer Gleichung mit einer unbeſtimmten Potenz der Größe $\sqrt{-1}.\sin x = \sqrt{(\cos x^2 - 1)}$ multipliciren, und zugleich alle Glieder deſſelben durch eben dieſe Potenz theilen. Wir haben alſo, wenn f den Exponenten dieſer Potenz anzeigt:

$$[\cos x + \sqrt{(\cos x^2 - 1)}]^n =$$

$$= (\sqrt{-1}\sin x)^f \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \cos x^{n-r} (\cos x^2 - 1)^{\frac{r-f}{2}}$$

Aber nach dem binomiſchen Lehrſatze iſt

$$(\cos x^2 - 1)^{\frac{r-f}{2}} = \sum_{o}^{w} (-1)^w \binom{\frac{r-f}{2}}{w} \cos x^{2\left(\frac{r-f}{2}\right)-w}$$

$$= \sum_{o}^{w} (-1)^w \binom{\frac{r-f}{2}}{w} \cos x^{r-f-2w}$$

daher

$$\cos n x + \sqrt{-1}\sin n x =$$

$$= (\sqrt{-1}\sin x)^f \sum_{o}^{r} \left[ \binom{n}{r} \cos x^{n-r} \sum_{o}^{w} (-1)^w \binom{\frac{r-f}{2}}{w} \cos x^{r-f-2w} \right]$$

$$= (\sqrt{-1}\sin x)^f \sum_{o}^{r} \sum_{o}^{w} (-1)^w \binom{n}{r} \binom{\frac{r-f}{2}}{w} \cos x^{n-f-2w}$$

$$= (\sqrt{-1}\sin x)^f \sum_{o}^{w} \left[ (-1)^w \cos x^{n-f-2w} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \binom{\frac{r-f}{2}}{w} \right]$$

Suchen wir das Aggregat

$$\sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \binom{\frac{r-f}{2}}{w}$$

auf einen einfachen Ausdruck zu reduciren. Es werde der Kürze wegen durch das Zeichen $\overset{n}{S}_w$ vorgestellt.

Wir erreichen unsern Zweck, wenn es uns gelingt, für $\overset{n}{S}_w$ eine Recursionsformel auszumitteln, und irgend einen speciellen Werth von $\overset{n}{S}_w$, allenfalls den Werth von $\overset{n}{S}_o$, unmittelbar anzugeben.

Es ist, wie man sogleich sieht, wenn man statt der Symbole die dadurch vorgestellten Zahlen setzt:

$$(n-r)\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r}$$

und $$[r-f-2(w-1)]\binom{\frac{r-f}{2}}{w-1} = 2w\binom{\frac{r-f}{2}}{w}$$

folglich, wenn man die erstere Gleichung mit $\binom{\frac{r-f}{2}}{w-1}$, die letztere mit $\binom{n}{r}$ multiplicirt, und beide Resultate addirt:

$$[n-(2w+f-2)]\binom{n}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{w-1} =$$

$$= n\sum\binom{n-1}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{w-1} + 2w\binom{n}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{w}$$

Hieraus erhält man nach 57, 2)

$$[n-(2w+f-2)]\sum_{o}^{r}\binom{n}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{w-1} =$$

$$= n\sum_{o}^{r}\binom{n-1}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{w-1} + 2w\sum_{o}^{r}\binom{n}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{w}$$

Aber der gewählten Bezeichnung gemäß ist:

$$\sum_{o}^{r}\binom{n}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{w} = \overset{n}{S}_w$$

$$\sum_{o}^{r}\binom{n}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{w-1} = {}^{n}S_{w-1}$$

$$\sum_{o}^{r}\binom{n-1}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{w-1} = {}^{n-1}S_{w-1};$$

daher $[n-(2w+f-2)]\,{}^{n}S_{w-1} = n\,{}^{n-1}S_{w-1} + 2w\,{}^{n}S_{w}$

also ${}^{n}S_{w} = \frac{n-(2w+f-2)}{2w}\,{}^{n}S_{w-1} - \frac{n}{2w}\,{}^{n-1}S_{w-1}$

Da nun der Werth von ${}^{n}S_{o}$ wegen

$${}^{n}S_{o} = \sum_{o}^{r}\binom{n}{r}\binom{\frac{r-f}{2}}{o} = \sum_{o}^{r}\binom{n}{r} = 2^{r} \quad (91)$$

bekannt ist, so wird man durch die zuletzt erhaltene Gleichung in den Stand gesetzt, nach und nach ${}^{n}S_{1}$, ${}^{n}S_{2}$, ${}^{n}S_{3}$ ... u. s. f zu bestimmen, folglich auch

$$\cos nx + \sqrt{-1}\,\sin nx = (\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x)^{n} =$$

$$= (\sqrt{-1}\,\sin x)^{f}\sum_{o}^{w}(-1)^{w}\,{}^{n}S_{w}\cos x^{n-f-2w}$$

auf den einfachsten Ausdruck zu bringen.

131.

Wir wollen hier nur die beiden Fälle $f = o$ und $f = 1$ in Betrachtung ziehen, in welchen ${}^{n}S_{1}$, ${}^{n}S_{2}$, ${}^{n}S_{3}$ . . . ein einfaches Bildungsgesetz befolgen.

Für $f = o$ besteht die Gleichung

$${}^{n}S_{w} = \frac{n-2(w-1)}{2w}\,{}^{n}S_{w-1} - \frac{n}{2w}\,{}^{n-1}S_{w-1}$$

Sie gibt, wegen ${}^{n}S_{o} = 2^{n}$

${}^{n}S_{1} = \frac{n}{2}\cdot 3^{n} - \frac{n}{2}\,2^{n-1} = n\,2^{n-2}$, ferner

${}^{n}S_{2} = \frac{n-2}{2\cdot 2}\,{}^{n}S_{1} - \frac{n}{2.2}\,{}^{n-1}S_{1} = \frac{n-2}{2}\cdot n\,2^{n-3} - \frac{n}{2}(n-1)2^{n-1} =$

$$= \frac{n}{2} 2^{n-4}(2n-4-n+1) = \frac{n(n-3)}{2} 2^{n-4}$$

$$\overset{n}{S}_3 = \frac{n-4}{2.3} \overset{n}{S}_2 - \frac{n}{2.3} \overset{n-1}{S}_2$$

$$= \frac{n-4}{3} \cdot \frac{n(n-3)}{2} \cdot 2^{n-5} - \frac{n}{3} \cdot \frac{(n-1)(n-4)}{2} 2^{n-6}$$

$$= \frac{n(n-4)}{2.3} 2^{n-6}(2n-6-n+1) = \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3} 2^{n-6}$$

Diese Resultate lassen sich auch so ausdrücken:

$$\overset{n}{S}_0 = \frac{n}{n} \binom{n}{0} 2^n$$

$$\overset{n}{S}_1 = \frac{n}{n-1} \binom{n-1}{1} 2^{n-2}$$

$$\overset{n}{S}_2 = \frac{n}{n-2} \binom{n-2}{2} 2^{n-4}$$

$$\overset{n}{S}_3 = \frac{n}{n-3} \binom{n-3}{3} 2^{n-6}$$

Das gemeinschaftliche Bildungsgesetz derselben fällt leicht in die Augen. Daß es auch für die folgenden Größen

$$\overset{n}{S}_4, \overset{n}{S}_5, \overset{n}{S}_6 \ldots \text{ u. s. w.}$$

fortbestehen werde, ist hinreichend begründet, wenn gezeigt wird, daß $\overset{n}{S}_w$ dieses Gesetz befolgen muß, sobald $\overset{n}{S}_{w-1}$ an dasselbe gebunden ist.

Es sey nämlich

$$\overset{n}{S}_{w-1} = \frac{n}{n-(w-1)} \binom{n-(w-1)}{w-1} 2^{n-2(w-1)}$$

so ist

$$\overset{n}{S}_w = \frac{n-2(w-1)}{2w} \overset{n}{S}_{w-1} - \frac{n}{2w} \overset{n-1}{S}_{w-1}$$

$$= \frac{n-2(w-1)}{w} \cdot \frac{n}{n-(w-1)} \binom{n-(w-1)}{w-1} 2^{n-(2w-1)}$$

$$- \frac{n}{w} \cdot \frac{n-1}{n-w} \binom{n-w}{w-1} 2^{n-2w}$$

$$= \frac{n}{w}\binom{n-w}{w-1} 2^{n-(2w-1)} - \frac{n}{w} \cdot \frac{n-1}{n-w}\binom{n-w}{w-1} 2^{n-2w}$$

$$= \frac{n}{w}\binom{n-w}{w-1} 2^{n-2w}\left(2 - \frac{n-1}{n-w}\right)$$

$$= \frac{n}{w}\binom{n-w}{w-1} 2^{n-2w} \cdot \frac{n-2w+1}{n-w} = \frac{n}{n-w}\binom{n-w}{w} 2^{n-2w}$$

folglich erſtreckt ſich das erwähnte Geſetz auch über $\overset{n}{S}_w$.

Man hat demnach

1) $\cos n x + \sqrt{-1} \sin n x =$

$$= \sum_{o}^{w} (-1)^w \cdot \frac{n}{n-w}\binom{n-w}{w} (2\cos x)^{n-2w}$$

oder, wenn man das Summenzeichen wegläßt:

$$\cos n x + \sqrt{-1} \sin n x =$$

$$= (2\cos x)^n - n(2\cos x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2\cos x)^{n-4}$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3}(2\cos x)^{n-6}$$

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4}(2\cos x)^{n-8} - \text{ꝛc.}$$

Für $f = 1$ ergibt ſich die Gleichung:

$$\overset{n}{S}_w = \frac{n-(2w-1)}{2w} \overset{n}{S}_{w-1} - \frac{n}{2w} \overset{n-1}{S}_{w-1}$$

Aus derſelben folgt wegen $\overset{n}{S}_o = 2^n$

$$\overset{n}{S}_1 = (n-1)2^{n-1} - n\,2^{n-2} = (n-2)\,2^{n-2}$$

$$\overset{n}{S}_2 = \frac{n-3}{2 \cdot 2}\overset{n}{S}_1 - \frac{n}{2.2}\overset{n-1}{S}_1 = \frac{n-3}{2}(n-2)2^{n-3} - \frac{n}{2}(n-3)2^{n-4}$$

$$= \frac{n-3}{2}\,2^{n-4}[2n-4-n] = \frac{(n-3)(n-4)}{2}\,2^{n-4}$$

$$\overset{n}{S}_3 = \frac{n-5}{2.3}\overset{n}{S}_2 - \frac{n}{2.3}\overset{n}{S}_2$$

$$= \frac{n-5}{3} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2}\,2^{n-5} - \frac{n}{3}\,\frac{(n-4)(n-5)}{2}\,2^{n-6} =$$

$$= \frac{(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3} 2^{n-6}[2n-6-n]$$

$$= \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2 \cdot 3} 2^{n-6}$$

oder $\overset{n}{S}_0 = \binom{n-1}{0} 2^n$

$$\overset{n}{S}_1 = \binom{n-2}{1} 2^{n-2}$$

$$\overset{n}{S}_2 = \binom{n-3}{2} 2^{n-4}$$

$$\overset{n}{S}_3 = \binom{n-4}{3} 2^{n-6}$$

Es sey nun dem hier bemerkbaren Bildungsgesetze gemäß:

$$\overset{n}{S}_{w-1} = \binom{n-w}{w-1} 2^{n-2(w-1)}$$

so ist

$$\overset{n}{S}_w = \frac{n-(2w-1)}{w}\binom{n-w}{w-1} 2^{n-(2w-1)} - \frac{n}{w}\binom{n-w-1}{w-1} 2^{n-2w}$$

$$= \frac{n-w}{w}\binom{n-w-1}{w-1} 2^{n-(2w-1)} - \frac{n}{w}\binom{n-w-1}{w-1} 2^{n-2w}$$

$$= \frac{1}{w}\binom{n-w-1}{w-1} 2^{n-2w}[2n-2w-n]$$

$$= \frac{n-2w}{w}\binom{n-w-1}{w-1} 2^{n-2w} = \binom{n-(w+1)}{w} 2^{n-2w}$$

welcher Ausdruck demselben Gesetze entspricht.

Es gilt also dieses Gesetz allgemein, und daher hat man:

2) $\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx =$

$$= \sqrt{-1}\sin x \sum_0^w (-1)^w \binom{n-(w+1)}{w} 2^{n-2w}\cos x^{n-(2w+1)}$$

oder, wenn man das Summenzeichen wegläßt:

$$\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx = \sqrt{-1}.\sin x \Big( 2^n \cos x^{n-1}$$

$$-(n-2)2^{n-2}\cos x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} 2^{n-4}\cos x^{n-5}$$

$$- \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3} 2^{n-6}\cos x^{n-7} + \text{ꝛc. } \ldots \Big)$$

## 132.

Die Entwickelung des Binoms

$$\cos n x - \sqrt{-1} \cdot \sin n x = (\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x)^n$$

in eine Reihe kann auf jene des Ausdruckes

$$\cos n x + \sqrt{-1} \cdot \sin n x$$

zurückgeführt werden. Es ist nämlich

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x) =$$
$$= \cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

folglich $\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^{-1}$

und $(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^{-n}$.

Es gibt also die für $(\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x)^n$ gefundene Reihe sogleich die für $(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n$ geltende, wenn man in der erstern $-n$ statt $n$ setzt. Zu derselben Folgerung gelangt man auch durch die Bemerkung, daß nach den bekannten Lehren der Goniometrie

$\cos -n x = \cos n x$, und $\sin -n x = -\sin n x$ ist,

folglich $\cos n x + \sqrt{-1} \sin n x$, wenn man $n$ mit $-n$ vertauscht, in $\cos n x - \sqrt{-1} \cdot \sin n x$ übergeht.

Hiedurch erhält man aus 1)

$$\cos n x - \sqrt{-1} \sin n x =$$
$$= \sum_{0}^{w} (-1)^w \frac{n}{n+w} \binom{-n-w}{w} (2 \cos x)^{-n-2w}$$

Es ist aber nach 89 $\binom{-n-w}{w} = (-1)^w \binom{n+2w-1}{w}$

folglich

3) $\cos n x - \sqrt{-1} \sin n x =$
$$= \sum_{0}^{w} \frac{n}{n+w} \binom{n+2w-1}{w} (2 \cos x)^{-n-2w}$$

nämlich $\cos nx - \sqrt{-1}\,.\,\sin nx =$

$$= (2\cos x)^{-n} + n(2\cos x)^{-n-2} + \frac{n(n+3)}{2}(2\cos x)^{-n-4}$$
$$+ \frac{n(n+4)(n+5)}{2.3}(2\cos x)^{-n-6}$$
$$+ \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{2.3.4}(2\cos x)^{-n-8} + \text{ꝛc.}$$

Aus 2) aber ergibt sich

$\cos nx - \sqrt{-1}\,\sin nx =$

$$\sqrt{-1}\,\sin x \overset{w}{\underset{0}{\Sigma}} (-1)^w \binom{-n-(w+1)}{w} 2^{-n-2w} \cos x^{-n-(2w+1)}$$

oder wegen $\binom{-n-(w+1)}{w} = (-1)^w \binom{n+2w}{w}$,

4) $\cos nx - \sqrt{-1}\,\sin nx =$

$$= \sqrt{-1}\,.\,\sin x \overset{w}{\underset{0}{\Sigma}} \binom{n+2w}{w} 2^{-n-2w} \cos^{-n-(2w+1)}$$

nämlich:

$$\cos nx - \sqrt{-1}\,.\,\sin nx = \sqrt{-1}\,\sin x \Big( 2^{-n}\cos x^{-n-1}$$
$$+ (n+2)2^{-n-2}\cos x^{-n-3} + \frac{(n+3)(n+4)}{2}2^{-n-4}\cos x^{-n-5}$$
$$+ \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{2.3}2^{-n-6}\cos x^{-n-7} + \text{ꝛc.} \ldots \Big)$$

## 133.

Wollte man die Umstaltung von $\cos nx - \sqrt{-1}\,\sin nx$ in eine nach Potenzen von $\cos x$ geordnete Reihe auf dem in 130 eingeschlagenen Wege vornehmen, so würde das Resultat dieser Rechnung von dem dortigen nur darin abweichen, daß statt $\binom{n}{r}$, $(-1)^r \binom{n}{r}$ erschiene.

Nähme man nun

$$\overset{r}{\underset{0}{\Sigma}} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{\frac{r-f}{2}}{w} = S^n_w \text{ an},$$

so fände man zwischen $\overset{n}{S}_w$, $\overset{n}{S}_{w-1}$, $\overset{n-1}{S}_{w-1}$ genau dieselbe Gleichung, wie in 130.

Aber hier wäre

$$\overset{n}{S}_0 = \sum_0^r (-1)^r \binom{n}{r} \binom{\frac{r-f}{2}}{0} = \sum_0^r (-1)^r \binom{n}{r} = 0 ; \quad (92)$$

folglich ergäbe sich

$$\overset{n}{S}_1 = 0, \quad \overset{n}{S}_2 = 0, \quad \overset{n}{S}_3 = 0 \ldots \text{ ꝛc.}$$

so, daß man auf diese Art zu keinem annehmbaren Resultate geführt würde.

Der Grund dieser Anomalie liegt in der Form, welche man hier der Reihe für

$$\cos n x - \sqrt{-1} \sin n x = (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n$$

aufdringt, und die der Natur dieser Größe nicht angemessen ist. Es läßt sich nämlich $(\cos x - \sqrt{-1} . \sin x)^n$ nur nach solchen fallenden Potenzen von $\cos x$ ausdrücken, deren Exponenten negative Zahlen sind, wie man leicht sieht, wenn man statt $\sqrt{-1} . \sin x$ den gleichgeltenden Ausdruck

$$\sqrt{(\cos x^2 - 1)} = (\cos x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_0^w (-1)^w \binom{\frac{1}{2}}{w} \cos x^{2\left(\frac{1}{2}-w\right)}$$

$$= \cos x + \sum_1^w (-1)^w \binom{\frac{1}{2}}{w} \cos x^{1-2w}$$

setzt, wodurch man

$$(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n = \left[\sum_1^w (-1)^{w-1} \binom{\frac{1}{2}}{w} \cos x^{-(2w-1)}\right]^n$$

findet; eine Potenz, die sich, der polynomischen Formel zufolge, nur nach Potenzen der Hauptgröße mit negativen Exponenten entwickeln läßt.

## 134.

Addirt man nun die Gleichungen 1) und 3), und dividirt man die Summe durch 2, so findet man:

$$\cos n x = \sum_{0}^{w} (-1)^w \cdot \frac{n}{n-w} \binom{n-w}{w} 2^{n-2w-1} \cos x^{n-2w}$$

$$+ \sum_{0}^{w} \frac{n}{n+w} \binom{n+2w-1}{w} 2^{-n-2w-1} \cos x^{-n-2w}.$$

Subtrahirt man hingegen die Gleichung 4) von der Gleichung 2), so erhält man, nach Wegschaffung des gemeinschaftlichen Factors $2\sqrt{-1}$,

$$\sin n x = \sin x \left[ \sum_{0}^{w} (-1)^w \binom{n-(w+1)}{w} (2 \cos x)^{n-(2w+1)} \right.$$

$$\left. - \sum_{0}^{w} \binom{n+2w}{w} (2 \cos x)^{-n-(2w+1)} \right]$$

Man sieht, daß hier vermieden worden ist, $\sin n x$ aus den Gleichungen 1) und 3), oder $\cos n x$ aus 2) und 4) abzuleiten, weil sonst das Resultat, wegen der Anwesenheit des Factors $\sqrt{-1}$, eine imaginäre Gestalt erhalten hätte.

Die für $\cos n x$ und $\sin n x$ gefundenen Ausdrücke gelten, n mag was immer für eine ganze Zahl seyn, und haben im Allgemeinen die Form unendlicher Reihen. Ist jedoch n eine ganze positive Zahl, so kann man dieselben auf begrenzte Ausdrücke zusammenziehen.

In dem Ausdrucke für $\cos n x$ läßt sich der Coefficient

$$(-1)^w \frac{n}{n-w} \binom{n-w}{w}$$

auch auf die Form

$$(-1)^w \frac{n}{w} \binom{n-w-1}{w-1}$$

bringen, woraus erhellet, daß er, wenn n einen ganzen positiven Werth hat, sobald $w - 1 > n - w - 1$, oder $w > \frac{n}{2}$ geworden ist, verschwindet, und in diesem Zustande beharret, bis $n - w - 1$ anfängt negativ zu werden, das heißt bis $w > n - 1$ wird. Die Reihe der letzterer Bedingung entsprechenden Werthe von w geht aus $n + v$ für $v = 0, 1, 2, 3 \ldots$

hervor. Setzt man daher $w = n + v$, so verwandelt sich erwähnter Coefficient in

$$(-1)^{n+v} \frac{n}{n+v}\binom{-v-1}{n+v-1} =$$

$$= (-1)^{n+v} \frac{n}{n+v} \cdot (-1)^{n+v-1}\binom{n+2v-1}{n+v-1} =$$

$$= -\frac{n}{n+v}\binom{n+2v-1}{n+2v-1-(n+v-1)} = -\frac{n}{n+v}\binom{n+2v-1}{v}$$

Es sind also alle Glieder des Aggregates

$$\sum_{0}^{w} (-1)^{w} \frac{n}{n-w}\binom{n-w}{w} 2^{n-2w-1} \cos x^{n-2w}$$

deren Zeiger die Zahl $n-1$ übersteigen, zusammengenommen

$$= -\sum_{0}^{v} \frac{n}{n+v}\binom{n+2v-1}{v} 2^{-n-2v-1} \cos x^{-n-2v}$$

und tilgen somit das Aggregat

$$\sum_{0}^{w} \frac{n}{n+w}\binom{n+2w-1}{w} 2^{-n-2w-1} \cos x^{-n-2w}$$

d. h. sobald n einen ganzen positiven Werth erhält, ist

$$\cos n x = \sum_{0,\frac{n}{2}}^{w} (-1)^{w} \frac{n}{n-w}\binom{n-w}{w} 2^{n-2w-1} \cos x^{n-2w}$$

Derselbe Umstand tritt für ein ganzes positives n bei dem Ausdrucke sin n x ein. Man findet durch ähnliche Schlüsse:

$$\sin nx = \sin x \sum_{0,\frac{n-1}{2}}^{w} (-1)^{w}\binom{n-(w+1)}{w}(2\cos x)^{n-(2w+1)}$$

Für $n = 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots$ geben diese Formeln:

$$\cos 2x = 2\cos x^2 - 1$$
$$\cos 3x = 4\cos x^3 - 3\cos x$$
$$\cos 4x = 8\cos x^4 - 8\cos x^2 + 1$$
$$\cos 5x = 16\cos x^5 - 20\cos x^3 + 5\cos x$$
$$\cos 6x = 32\cos x^6 - 48\cos x^4 + 18\cos x^2 - 1$$

u. s. w.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\sin 3x = \sin x (4 \cos x^2 - 1)$$
$$\sin 4x = \sin x (8 \cos x^3 - 4 \cos x)$$
$$\sin 5x = \sin x (16 \cos x^4 - 12 \cos x^2 + 1)$$
$$\sin 6x = \sin x (32 \cos x^5 - 32 \cos x^3 + 6 \cos x)$$

u. ſ. w.

wobei man noch, um dieſe Sinuſſe bloß durch durch cos x darzuſtellen, $\sqrt{(1 - \cos x^2)}$ ſtatt sin x zu ſchreiben hat.

## 135.

Man kommt zu den in 134 erhaltenen Reſultaten nicht, wie man allenfalls erwarten dürfte, wenn man in den Formeln 129

$$\cos nx = \sum_{o}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r} \cos x^{n-2r} \sin x^{2r}$$

$$\sin nx = \sum_{o}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \cos x^{n-(2r+1)} \sin x^{2r+r}$$

$$= \sin x \sum_{o}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \cos x^{n-(2r+1)} \sin x^{2r}$$

$1 - \cos x^2$ ſtatt $\sin x^2$ ſubſtituirt.

Man hat nämlich, da hier r eine ganze poſitive Zahl vorſtellt:

$$\sin x^{2r} = (1 - \cos x^2)^r = \sum_{o,r}^{w} (-1)^w \binom{r}{w} \cos x^{2w}$$

folglich

$$\cos nx = \sum_{o}^{r} \left[ (-1)^r \binom{n}{2r} \cos x^{n-2r} \sum_{o,r}^{w} (-1)^w \binom{r}{w} \cos x^{2w} \right]$$

$$= \sum_{o}^{r} \sum_{o,r}^{w} (-1)^{r+w} \binom{n}{2r} \binom{r}{w} \cos x^{n-2(r-w)}$$

$$\sin nx = \sin x \sum_{o}^{r} \sum_{o,r}^{w} (-1)^{r+w} \binom{n}{2r+1} \binom{r}{w} \cos x^{n-2(r-w)-1}$$

Es ſey $r - w = v$, ſo iſt v, weil w nie größer werden kann als r, nur ganzer poſitiver Werthe, o mit eingerechnet,

fähig; man findet demnach durch Einführung des neuen Zeigers v, wegen $w = r - v$ und $(-1)^{r+w} = (-1)^{2r-v} = (-1)^v$, mit Rücksicht auf den hier möglichen Umfang der Werthe von r:

$$\cos nx = \sum_{0}^{v} \left[ (-1)^v \cos x^{n-2v} \sum_{v}^{r} \binom{n}{2r} \binom{r}{r-v} \right]$$

$$\sin nx = \sin x \sum_{0}^{v} \left[ (-1)^v \cos x^{n-(2v+1)} \sum_{v}^{r} \binom{n}{2r+1} \binom{r}{r-v} \right]$$

Nun ist $(n-2r)\binom{n}{2r} = n\binom{n-1}{2r}$

und $[r-(v-1)]\binom{r}{r-(v-1)} = v\binom{r}{r-v}$

folglich, wenn man die erste Gleichung mit $\binom{r}{r-(v-1)}$, die zweite mit $2\binom{n}{2r}$ multiplicirt, und beide Gleichungen addirt:

$$[n-2(v-1)]\binom{n}{2r}\binom{r}{r-(v-1)} = n\binom{n-1}{2r}\binom{r}{r-(v-1)} + 2v\binom{n}{2r}\binom{r}{r-v}$$

Hieraus ergibt sich nach 57, 2)

$$[n-2(v-1)] \sum_{v-1}^{r} \binom{n}{2r}\binom{r}{r-(v-1)} = n \sum_{v-1}^{r} \binom{n-1}{2r}\binom{r}{r-(v-1)} + 2v \sum_{v-1}^{r} \binom{n}{2r}\binom{r}{r-v}$$

Man setze $\sum_{v}^{r} \binom{n}{2r}\binom{r}{r-v} = \overset{n}{S}_v$

so ist $\sum_{v-1}^{r} \binom{n}{2r}\binom{r}{r-(v-1)} = \overset{n}{S}_{v-1}$

$$\sum_{v-1}^{r} \binom{n-1}{2r}\binom{r}{r-(v-1)} = \overset{n-1}{S}_{v-1}$$

ferner ist $\sum_{v-1}^{r} \binom{n}{2r}\binom{n}{r-v} =$

$$= \binom{n}{2(v-1)}\binom{r}{-1} + \sum_{v}^{r} \binom{n}{2r}\binom{r}{r-v} = \overset{n}{S}_v$$

daher $[n-2(\nu-1)]\overset{n}{S}_{\nu-1} = n\overset{n-1}{S}_{\nu-1} + 2\nu\overset{n}{S}_{\nu}$

$$\text{also } \overset{n}{S}_{\nu} = \frac{n-2(\nu-1)}{2\nu}\overset{n}{S}_{\nu-1} - \frac{n}{2\nu}\overset{n-1}{S}_{\nu-1}$$

eine Recursionsformel, welche mit der in 131 für $f = o$ gefundenen übereinstimmt.

Nun ist $\overset{n}{S}_{o} = \sum_{o}^{r}\binom{n}{2r}\binom{r}{r} = \sum_{o}^{r}\binom{n}{2r}$,

aber (91 . 92) $\sum_{o}^{r}\binom{n}{r} = 2^{n}$ und $\sum_{o}^{r}(-1)^{r}\binom{n}{r} = o$;

das heißt, wenn man die Glieder mit geraden und mit ungeraden Zeigern von einander sondert:

$$\sum_{o}^{r}\binom{n}{2r} + \sum_{o}^{r}\binom{n}{2r+1} = 2^{n}$$

$$\text{und } \sum_{o}^{r}\binom{n}{2r} - \sum_{o}^{r}\binom{n}{2r+1} = o$$

$$\text{also } \sum_{o}^{r}\binom{n}{2r} = \sum_{o}^{r}\binom{n}{2r+1} = 2^{n-1}$$

$$\text{oder } \overset{n}{S}_{o} = 2^{n-1}.$$

Von diesem besonderen Werthe der Größe $\overset{n}{S}_{\nu}$ ausgehend, findet man, dem in 131 eingeschlagenen Wege folgend:

$$\overset{n}{S}_{\nu} = \sum_{o}^{r}\binom{n}{2r}\binom{r}{r-\nu} = \frac{n}{n-\nu}\binom{n-\nu}{\nu}2^{n-2\nu-1}$$

$$\text{daher } \cos nx = \sum_{o}^{\nu}(-1)^{\nu}\frac{n}{n-\nu}\binom{n-\nu}{\nu}2^{n-2\nu-1}\cos x^{n-2\nu}$$

Auf dieselbe Art erhält man mit Hülfe der Gleichungen

$$[n-(2r+1)]\binom{n}{2r+1} = n\binom{n-1}{2r+1}$$

$$[r-(\nu-1)]\binom{r}{r-(\nu-1)} = \nu\binom{r}{r-\nu}$$

$$\text{für } \sum_{o}^{r}\binom{n}{2r+1}\binom{r}{r-\nu} = \overset{n}{T}_{\nu}$$

die Recursionsformel

$$\overset{n}{T}_v = \frac{n-(2v-1)}{2v}\overset{n}{T}_{v-1} - \frac{n}{2v}\overset{n-1}{T}_{v-1}$$

und durch dieselbe, wegen

$$\overset{n}{T}_0 = \sum_0^r \binom{n}{2r+1} = 2^{n-1}$$

wie in 131

$$\overset{n}{T}_v = \binom{n-(v+1)}{v} 2^{n-2v-1}$$

folglich $\sin n x = \sin x \sum_0^v (-1)^v \binom{n-(v+1)}{v} (2\cos x)^{n-(2v+1)}$

Beide Resultate sind, wie aus 134 zu ersehen ist, mangelhaft; denn sie gelten höchstens, wenn die ganze Rechnung auf ein ganzes positives n bezogen, und der Umfang der Werthe von v auf bestimmte Grenzen eingeschränkt wird. Dieses Beispiel zeigt hinreichend, mit welcher Vorsicht unendliche Reihen, die, wenn sie nicht convergiren, bloß als analytische Gebilde erscheinen, behandelt werden müssen, zumal, wenn man dieselben durch Einführung neuer Reihen transformiren will. Um daher der Gefahr ähnlicher Verirrungen auszuweichen, ist man genöthigt, die Entwickelung von sin n x und cos n x unmittelbar aus der goniometrischen Binomialformel 128 zu schöpfen.

## 136.

Um sin n x und cos n x durch sin x ausdrücken zu können, müssen wir das Binom

$$\cos n x + \sqrt{-1} \sin n x = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n$$

nach den Potenzen von sin x entwickeln.

Nach dem binomischen Lehrsatze erhalten wir, indem wir die Glieder mit geraden und ungeraden Zeigern von einander trennen:

$$\cos n x + \sqrt{-1} \sin n x = \sum_{0}^{r} \binom{n}{2r} \cos x^{n-2r} (\sqrt{-1} \sin x)^{2r}$$

$$+ \sum_{0}^{r} \binom{n}{2r+1} \cos x^{n-(2r+1)} (\sqrt{-1} \sin x)^{2r+1}$$

$$= \cos x^f \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r} \cos x^{n-f-2r} \sin x^{2r}$$

$$+ \sqrt{-1} \cdot \cos x^f \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \cos x^{n-f-(2r+1)} \sin x^{2r+1}$$

Ferner iſt $\cos x^{n-f-2r} = (1 - \sin x^2)^{\frac{n-f-2r}{2}}$

$$= \sum_{0}^{w} (-1)^w \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{w} \sin x^{2w}$$

und $\cos x^{n-f-(2r+1)} = \sum_{0}^{w} (-1)^w \binom{\frac{n-f-(2r+1)}{2}}{w} \sin x^{2w}$

folglich $\cos n x + \sqrt{-1} \sin n x =$

$$= \cos x^f \sum_{0}^{r} \left[ (-1)^r \binom{n}{2r} \sin x^{2r} \sum_{0}^{w} (-1)^w \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{w} \sin x^{2w} \right]$$

$$+ \sqrt{-1} \cdot \cos x^f \sum_{0}^{r} \left[ (-1)^r \binom{n}{2r+1} \sin x^{2r+1} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{0}^{w} (-1)^w \binom{\frac{n-f-(2r+1)}{2}}{w} \sin x^{2w} \right]$$

$$= \cos x^f \sum_{0}^{r} \sum_{0}^{w} (-1)^{r+w} \binom{n}{2r} \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{w} \sin x^{2(r+w)}$$

$$+ \sqrt{-1} \cdot \cos x^f \sum_{0}^{r} \sum_{0}^{w} (-1)^{r+w} \binom{n}{2r+1} \binom{\frac{n-f-(2r+1)}{2}}{w} \times$$

$$\times \sin x^{2(r+w)+1}$$

Es ſey $r + w = v$, ſo ergibt ſich:

$\cos n x + \sqrt{-1} \sin n x =$

$$= \cos x^f \sum_{0}^{v} \left[ (-1)^v \sin x^{2v} \sum_{0,v}^{r} \binom{n}{2r} \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{v-r} \right]$$

$$+ \sqrt{-1} \cdot \cos x^f \sum_{0}^{v} \left[ (-1)^v \sin x^{2v+1} \sum_{0,v}^{r} \binom{n}{2r+1} \binom{\frac{n-f-(2r+1)}{2}}{v-r} \right]$$

Setzen wir

$$\sum_{\rho,\nu}^{r} \binom{n}{2r} \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{\nu-r} = \overset{n}{S}_\nu$$

$$\sum_{\rho,\nu}^{r} \binom{n}{2r+1} \binom{\frac{n-f-(2r+1)}{2}}{\nu-r} = \overset{n}{T}_\nu$$

und suchen wir Recursionsformeln für $\overset{n}{S}_\nu$, $\overset{n}{T}_\nu$.

Es ist:

$$2r \binom{n}{2r} = n \binom{n-1}{2r-1}$$

$$2(\nu-r) \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{\nu-r} = [n-f-2(\nu-1)] \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{\nu-r-1}$$

folglich, wenn beide Gleichungen nach verrichteter Multiplication der ersten mit $\binom{n-f-2r}{\nu-r}$, und der zweiten mit $\binom{n}{2r}$, addirt werden:

$$2\nu \binom{n}{2r} \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{\nu-r} =$$

$$= n \binom{n-1}{2r-1} \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{\nu-r} + [n-f-2(\nu-1)] \binom{n}{2r} \binom{\frac{n-f-2r}{2}}{\nu-r-1}$$

Nimmt man beiderseits die Summen in Bezug auf den Zeiger r, von o angefangen bis $\nu$, und berücksichtiget man die Bedeutung der Zeichen $\overset{n}{S}_\nu$, $\overset{n}{T}_\nu$, so findet man:

a) $2\nu \overset{n}{S}_\nu = n \overset{n-1}{T}_{\nu-1} + [n-f-2(\nu-1)] \overset{n}{S}_{\nu-1}$

Auf dieselbe Art geben die Gleichungen

$$(2r+1) \binom{n}{2r+1} = n \binom{n-1}{2r}$$

$$2(\nu-r) \binom{\frac{n-f-(2r+1)}{2}}{\nu-r} = [n-f-(2\nu-1)] \binom{\frac{n-f-(2r+\nu)}{2}}{\nu-r-1}$$

b) $(2\nu+1) \overset{n}{T}_\nu = n \overset{n-1}{S}_\nu + [n-f-(2\nu-1)] \overset{n}{T}_{\nu-1}$

Der Gang dieser Rechnung ist dem in 130 Statt findenden

den analog, und daher die Nachweiſung jedes einzelnen Schrittes überflüſſig.

Aus der Bedeutung der Zeichen $\overset{n}{S}_\nu$, $\overset{n}{T}_\nu$ erkennt man, daß

$$\overset{n}{S}_0 = \binom{n}{0}\binom{\frac{n-f}{2}}{0} = 1, \text{ und}$$

$$\overset{n}{T}_0 = \binom{n}{1}\binom{\frac{n-f-1}{2}}{0} = n \text{ iſt.}$$

Dieß vorausgeſetzt, findet man $S_1$ mittelſt der Gleichung a), dann $T_1$ mittelſt der Gleichung b); hernach $S_2$ mittelſt a), $T_2$ mittelſt b) u. ſ. w.

Hieraus folgt ſodann:

$$\cos n x + \sqrt{-1} \sin n x = \cos x^f \sum_0^\nu (-1)^\nu \overset{n}{S}_\nu \sin x^{2\nu}$$

$$+ \sqrt{-1} \cos x^f \sum_0^\nu (-1)^\nu \overset{n}{T}_\nu \sin x^{2\nu+1}$$

und durch Aenderung des Zeichens von $\sqrt{-1}$:

$$\cos n x - \sqrt{-1} \sin n x = \cos x^f \sum_0^\nu (-1)^\nu \overset{n}{S}_\nu \sin x^{2\nu}$$

$$- \sqrt{-1} \cos x^f \sum_0^\nu (-1)^\nu \overset{n}{T}_\nu \sin x^{2\nu+1}$$

Es iſt alſo:

$$\cos n x = \cos x^f \sum_0^\nu (-1)^\nu \overset{n}{S}_\nu \sin x^{2\nu}$$

$$\sin n x = \cos x^f \sum_0^\nu (-1)^\nu \overset{n}{T}_\nu \sin x^{2\nu+1}.$$

Wie aus dem Gange der hier geführten Rechnung erhellet, hätte man dieſe Reſultate auch aus den Reihen 129 ableiten können.

137.

Die zwei Fälle, wenn $f=0$, und wenn $f=1$ angenommen wird, führen auf einfache Ausdrücke für

$$\overset{n}{S}_v \text{ und } \overset{n}{T}_v .$$

Wird $f=0$ gesetzt, so hat man:

$$\overset{n}{S}_v = \frac{n}{2v}\overset{n-1}{T}_{v-1} + \frac{n-2(v-1)}{2v}\overset{n}{S}_{v-1}$$

$$\overset{n}{T}_v = \frac{n}{2v+1}\overset{n-1}{S}_v + \frac{n-(2v-1)}{2v+1}\overset{n}{T}_{v-1} .$$

Es ist daher

$$\overset{n}{S}_1 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{1.2}$$

$$\overset{n}{T}_1 = \frac{n(n-1)^2}{1.2.3} + \frac{(n-1)n}{3} = \frac{n(n-1)}{1.2.3}(n-1+2) = \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}$$

$$\overset{n}{S}_2 = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} + \frac{n^2(n-2)}{1.2.4}$$

$$= \frac{n^2(n-2)}{1.2.3.4}(n-1+3) = \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}$$

$$\overset{n}{T}_2 = \frac{n(n-1)^2(n+1)(n-3)}{1.2.3.4.5} + \frac{n(n^2-1)(n-3)}{1.2.3.5}$$

$$= \frac{n(n^2-1)(n-3)}{1.2.3.4.5}(n-1+4)$$

$$= \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5}$$

Diese Resultate lassen sich durch Binomial-Coefficienten folgendermaßen darstellen:

$$\overset{n}{S}_1 = \frac{n}{2}\binom{n}{2}2^1 , \quad \overset{n}{T}_1 = \frac{n}{3}\binom{n+1}{2}2^2$$

$$\overset{n}{S}_2 = \frac{n}{4}\binom{n+2}{3}2^3 , \quad \overset{n}{T}_2 = \frac{n}{5}\binom{n+3}{4}2^4$$

Ist nun dem hier bemerkbaren Bildungsgesetze gemäß:

$$\overset{n}{S}_{\nu-1} = \frac{n}{2(\nu-1)} \binom{\frac{n+2(\nu-2)}{2}}{2\nu-2} 2^{2\nu-3},$$

$$\overset{n}{T}_{\nu-1} = \frac{n}{2\nu-1} \binom{\frac{n+2\nu-3}{2}}{2(\nu-1)} 2^{2(\nu-1)},$$

so folgt:

$$\overset{n}{S}_{\nu} = \frac{n}{2\nu} \cdot \frac{n-1}{2\nu-1} \binom{\frac{n+2(\nu-2)}{2}}{2\nu-2} 2^{2(\nu-1)} + \frac{n-2(\nu-1)}{2\nu} \times$$

$$\times \frac{n}{2(\nu-1)} \binom{\frac{n+2(\nu-2)}{2}}{2\nu-3} 2^{2\nu-3}$$

$$= \frac{n}{2\nu} \binom{\frac{n+2(\nu-2)}{2}}{2\nu-2} 2^{2(\nu-1)} \left[\frac{n-1}{2\nu-1} + 1\right]$$

$$= \frac{n}{2\nu} \binom{\frac{n+2(\nu-2)}{2}}{2\nu-2} 2^{2(\nu-1)} \cdot \frac{n+2(\nu-1)}{2\nu-1}$$

$$= \frac{n}{2\nu} \binom{\frac{n+2(\nu-1)}{2}}{2\nu-1} 2^{2\nu-1}$$

$$\overset{n}{T}_{\nu} = \frac{n}{2\nu+1} \cdot \frac{n-1}{2\nu} \binom{\frac{n+2\nu-3}{2}}{2\nu-1} 2^{2\nu-1} + \frac{n-(2\nu-1)}{2\nu+1} \times$$

$$\times \frac{n}{2\nu-1} \binom{\frac{n+2\nu-3}{2}}{2\nu-1} 2^{2\nu-2}$$

$$= \frac{n}{2\nu+1} \binom{\frac{n+2\nu-3}{2}}{2\nu-1} 2^{2\nu-1} \left[\frac{n-1}{2\nu} + 1\right]$$

$$= \frac{n}{2\nu+1} \binom{\frac{n+2\nu-3}{2}}{2\nu-1} 2^{2\nu-1} \cdot \frac{n+2\nu-1}{2\nu}$$

$$= \frac{n}{2\nu+1} \binom{\frac{n+2\nu-1}{2}}{2\nu} 2^{2\nu}.$$

Diese Ausdrücke befolgen dasselbe Gesetz, sie sind daher die allgemeinen Formeln für $\overset{n}{S}_{\nu}, \overset{n}{T}_{\nu}$.

Durch Entwickelung der Binomial-Coefficienten, und Verbindung der von der Mitte gleichweit entfernten Factoren ihrer Zähler findet man auch:

$$\overset{n}{S}_\nu = \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)\ldots\ldots[n^2-(2\nu-2)^2]}{1.2.3.4\ .\ 5.6\ .\ 7.8\ \ldots\ldots\ (2\nu-1)\ 2\nu}$$

und

$$\overset{n}{T}_\nu = \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)\ldots\ldots[n^2-(2\nu-1)^2]}{1\ .\ 2.3\ .\ 4.5\ .\ 6.7\ \ldots\ldots\ 2\nu\ (2\nu+1)}$$

Es ist demnach:

$$\cos n x = \sum_0^\nu (-1)^\nu \frac{n}{2\nu} \binom{\frac{n+2(\nu-1)}{2}}{2\nu-1} 2^{2\nu-1} \sin x^{2\nu}$$

$$\sin n x = \sum_0^\nu (-1)^\nu \frac{n}{2\nu+1} \binom{\frac{n+2\nu-1}{2}}{2\nu} 2^{2\nu} \sin x^{2\nu+1}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\cos n x = 1 - \frac{n^2}{1.2} \sin x^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4} \sin x^4 - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4\ .\ 5.6} \sin x^6 + \text{&c.}$$

$$\sin n x = n \sin x - \frac{n(n^2-1^2)}{1\ .\ 2.3} \sin x^3 + \frac{n(n^2-1(n^2-3^2)}{1\ .\ 2.3\ .\ 4.5} \sin x^5 - \text{&c.}$$

Beide Reihen gelten für jeden ganzen Werth von n. Ist n überdieß eine positive Zahl, so bricht die erste Reihe nur dann ab, wenn n gerade, und die zweite nur dann, wenn n ungerade ist.

Es sey zweitens $f = 1$.

Dann ist $\overset{n}{S}_\nu = \frac{n}{2\nu} \overset{n-1}{T}_{\nu-1} + \frac{n-(2\nu-1)}{2\nu} \overset{n}{S}_{\nu-1}$

$$\overset{n}{T}_\nu = \frac{n}{2\nu+1} \overset{n-1}{S}_\nu + \frac{n-2\nu}{2\nu+1} \overset{n}{T}_{\nu-1}$$

folglich wegen $\overset{n}{S}_0 = 1$, $\overset{n}{T}_0 = n$:

$$\overset{n}{S}_1 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{1.2} = \frac{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}{1.2} 2^2 = \binom{\frac{n+1}{2}}{2} 2^2$$

$$\overset{n}{T}_1 = \frac{n}{3}\binom{\frac{n}{2}}{2}2^2 + \frac{n-2}{3}n = \frac{n}{3}\binom{\frac{n}{2}}{2}2^2 + \frac{2}{3}\binom{\frac{n}{2}}{2}2^2$$

$$= \binom{\frac{n}{2}}{2}2^2 \cdot \frac{n+2}{3} = \binom{\frac{n+2}{2}}{3}2^3$$

$$\overset{n}{S}_2 = \frac{n}{4}\binom{\frac{n+1}{2}}{3}2^3 + \frac{n-3}{4}\binom{\frac{n+1}{2}}{2}2^2$$

$$= \binom{\frac{n+1}{2}}{3}2^3 \cdot \frac{n+3}{4} = \binom{\frac{n+3}{2}}{4}2^4$$

$$\overset{n}{T}_2 = \frac{n}{5}\binom{\frac{n+2}{2}}{4}2^4 + \frac{n-4}{5}\binom{\frac{n+2}{2}}{3}2^3$$

$$= \binom{\frac{n+2}{2}}{4}2^4 \cdot \frac{n+4}{5} = \binom{\frac{n+4}{2}}{5}2^5$$

u. s. w.

und, wie sich auf dieselbe Art, wie oben, leicht zeigen läßt, allgemein:

$$\overset{n}{S}_\nu = \binom{\frac{n+2\nu-1}{2}}{2\nu}2^{2\nu}, \quad \overset{n}{T}_\nu = \binom{\frac{n+2\nu}{2}}{2\nu+1}2^{2\nu+1}$$

oder auch:

$$\overset{n}{S}_\nu = \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)\ldots[n^2-(2\nu-1)^2]}{1.2 \cdot 3.4 \cdot 5.6 \ldots (2\nu-1)2\nu}$$

$$\overset{n}{T}_\nu = \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(2\nu)^2]}{1 \cdot 2.3 \cdot 4.5 \ldots 2\nu(2\nu+1)}$$

folglich:

$$\cos nx = \cos x \sum_{0}^{\nu} (-1)^\nu \binom{\frac{n+2\nu-1}{2}}{2\nu}(2\sin x)^{2\nu}$$

$$\sin nx = \cos x \sum_{0}^{\nu} (-1)^\nu \binom{\frac{n+2\nu}{2}}{2\nu+1}(2\sin x)^{2\nu+1}$$

oder

$$\cos nx = \cos x\left(1 - \frac{(n^2-1^2)}{1.2}\sin x^2 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2 \cdot 3.4}\sin x^4 - \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.2 \cdot 3.4 \cdot 5.6}\sin x^6 - \text{&c.}\right)$$

$$\sin n x = \cos x \left( n \sin x - \frac{n(n^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin x^3 + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin x^5 - \text{ꝛc.} \right)$$

Iſt n eine ganze poſitive Zahl, ſo bricht die erſte Reihe ab, wenn n ungerade, und die zweite, wenn n gerade iſt.

Setzt man in der erſten Reihe für cos n x, und in der zweiten Reihe für sin n x, n = 2, 4, 6 . . .; ferner in der zweiten Reihe für cos n x, und in der erſten für sin n x

n = 3, 5, 7 . . .

ſo findet man:

$\cos 2x = 1 - 2\sin x^2$
$\cos 3x = \cos x(1 - 4\sin x^2)$
$\cos 4x = 1 - 8\sin x^2 + 8\sin x^4$
$\cos 5x = \cos x(1 - 12\sin x^2 + 16\sin x^4)$
$\cos 6x = 1 - 18\sin x^2 + 48\sin x^4 - 32\sin x^6$
$\cos 7x = \cos x(1 - 24\sin x^2 + 80\sin x^4 - 64\sin x^6)$

u. ſ. w.

$\sin 2x = 2\cos x \sin x$
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin x^3$
$\sin 4x = \cos x(4\sin x - 8\sin x^3)$
$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin x^3 + 16\sin x^5$
$\sin 6x = \cos x(6\sin x - 32\sin x^3 + 32\sin x^5)$
$\sin 7x = 7\sin x - 56\sin x^3 + 112\sin x^5 - 64\sin x^7$

u. ſ. w.

## 138.

Da cos n x und sin n x in 134 nach fallenden Potenzen von cos x, und in 137 nach ſteigenden Potenzen von sin x ausgedrückt worden ſind, ſo könnte man noch verlangen, ſowohl cos n x, als auch sin n x in Reihen darzuſtellen, welche nach ſteigenden Potenzen von cos x, oder nach fallenden Potenzen von sin x fortſchreiten.

Um dieſer Forderung Genüge zu leiſten, hat man nur bei der Entwickelung von

$$\cos n x + \sqrt{-1} \cdot \sin n x = (\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x)^n$$

nach dem binomiſchen Lehrſatze die beiden Theile des Binoms unter einander zu verwechſeln, ſo daß jener Theil, welcher früher mit den fallenden Exponenten verſehen war, nun mit ſteigenden Exponenten erſcheint.

So kann man ſtatt der in 130 zum Grunde gelegten Reihe folgende nehmen:

$$\cos n x + \sqrt{-1} \cdot \sin n x = \sum_0^r \binom{n}{r} (\sqrt{-1} \sin x)^{n-r} \cos x^r$$

$$= \sum_0^r \binom{n}{2r} (\sqrt{-1} \sin x)^{n-2r} \cos x^{2r} + \sum_0^r \binom{n}{2r+1} (\sqrt{-1} \sin x)^{n-2r-1} \cos x^{2r+1}$$

$$= (\sqrt{-1})^n \sum_0^r (-1)^r \binom{n}{2r} \sin x^{n-2r} \cos x^{2r} + (\sqrt{-1})^{n-1} \sum_0^r (-1)^r \binom{n}{2r+1} \sin x^{n-2r-1} \cos x^{2r+1}$$

und, wenn man das Zeichen von $\sqrt{-1}$ ändert:

$$\cos nx - \sqrt{-1} \sin nx = (-\sqrt{-1})^n \sum_0^r (-1)^r \binom{n}{2r} \sin x^{n-2r} \cos x^{2r} + (-\sqrt{-1})^{n-1} \sum_0^r (-1)^r \binom{n}{2r+1} \sin x^{n-2r-1} \cos x^{2r+1}$$

folglich

$$2 \cos nx = [(\sqrt{-1})^n + (-\sqrt{-1})^n] \times \sum_0^r (-1)^r \binom{n}{2r} \sin x^{n-2r} \cos x^{2r} + [(\sqrt{-1})^{n-1} + (-\sqrt{-1})^{n-1}] \times \sum_0^r (-1)^r \binom{n}{2r+1} \sin x^{n-2r-1} \cos x^{2r+1}$$

$$2\sin n x = \frac{(\sqrt{-1})^n - (-\sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}} \times$$

$$\times \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r} \sin x^{n-2r} \cos x^{2r}$$

$$+ \frac{(\sqrt{-1})^{n-1} - (-\sqrt{-1})^{n-1}}{\sqrt{-1}} \times$$

$$\times \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \sin x^{n-2r-1} \cos x^{2r+1}$$

Bezeichnet man durch $\pi$ die Länge der halben Kreisperipherie für den Halbmesser 1, oder was dasselbe ist, den Quotienten, welchen man erhält, wenn man die Peripherie irgend eines Kreises durch den zugehörigen Durchmesser theilt, so wird der rechte Winkel durch $\frac{\pi}{2}$ vorgestellt; daher ist

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Setzt man also in der Gleichung

$$\cos n x \pm \sqrt{-1} \cdot \sin n x = (\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^n$$

$x = \frac{\pi}{2}$, so findet man:

$$(\sqrt{-1})^n = \cos \frac{n\pi}{2} + \sqrt{-1} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$(-\sqrt{-1})^n \cos \frac{n\pi}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\text{also } (\sqrt{-1})^n + (-\sqrt{-1})^n = 2 \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$\frac{(\sqrt{-1})^n - (-\sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}} = 2 \sin \frac{n\pi}{2}$$

und eben so

$$(\sqrt{-1})^{n-1} + (-\sqrt{-1})^{n-1} = 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{2}$$

$$\frac{(\sqrt{-1})^{n-1} - (-\sqrt{-1})^{n-1}}{\sqrt{-1}} = 2 \sin \frac{(n-1)\pi}{2}$$

$$\text{mithin } \cos n x = \cos \frac{n\pi}{2} \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r} \sin x^{n-2r} \cos x^{2r}$$

$$+ \cos \frac{(n-1)\pi}{2} \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \sin x^{n-2r-1} \cos x^{2r+1}$$

$$\sin n x = \sin \frac{n\pi}{2} \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r} \sin x^{n-2r} \cos x^{2r}$$

$$+ \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \sin x^{n-2r-1} \cos x^{2r+1}$$

Die hier vorkommenden Aggregate

$$\sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r} \sin x^{n-2r} \cos x^{2r},$$

$$\sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \sin x^{n-2r-1} \cos x^{2r+1}$$

stimmen mit den in 136 und 137 entwickelten

$$\sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{2r} \cos x^{n-2r} \sin x^{2r},$$

$$\sum_{0}^{r} (-1) \binom{n}{2r+1} \cos x^{n-2r-1} \sin x^{2r+1}$$

überein, wenn man sin x mit cos x verwechselt, oder, was dasselbe ist, wenn man $\frac{\pi}{2} - x$ statt x setzt. Es können folglich die Resultate in 137 für die gegenwärtige Entwickelung benützt werden, wenn man dort sin x und cos x gegenseitig vertauscht. Man hat demnach Ausdrücke für cos n x und sin n x, welche nach steigenden Potenzen von cos x fortschreiten.

Man kann in obigen Gleichungen

statt $\cos \frac{(n-1)\pi}{2}$ auch $\sin \frac{n\pi}{2}$

und statt $\sin \frac{(n-1)\pi}{2}$ auch $-\cos \frac{n\pi}{2}$ schreiben.

Denn es ist den in 123 angeführten Grundformeln der Goniometrie gemäß:

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{2} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{2} = \sin\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -\cos\frac{n\pi}{2}$$

Auch sieht man, daß die obigen Ausdrücke für $\cos nx$ und $\sin nx$ eine einfache Folge eben dieser Formeln sind. Denn es ist:

$$\cos nx = \cos\left[\frac{n\pi}{2} - n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$= \cos\frac{n\pi}{2}\cos n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\frac{n\pi}{2}\sin n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin nx = \sin\left[\frac{n\pi}{2} - n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$= \sin\frac{n\pi}{2}\cos n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\frac{n\pi}{2}\sin n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Derselbe Weg führt auch zu Formeln für $\cos nx$ und $\sin nx$, welche nach den fallenden Potenzen von $\sin x$ geordnet sind.

## 139.

Bisher haben wir den Sinus und den Cosinus des vielfachen Bogens durch Potenzen des Sinus und des Cosinus des einfachen Bogens ausgedrückt. Allein man kann auch umgekehrt gegebene Potenzen des Sinus und des Cosinus eines Bogens durch die Sinusse oder Cosinusse von Vielfachen dieses Bogens darstellen.

Es ist nämlich:

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

folglich, für jeden Exponenten n

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^n =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} e^{(n-r)x\sqrt{-1}}\, e^{-rx\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} e^{(n-2r)x\sqrt{-1}}.$$

Aber man hat

$$e^{(n-2r)x\sqrt{-1}} = \cos(n-2r)x + \sqrt{-1}\sin(n-2r)x,$$

folglich ist $\cos x^n =$

$$\frac{1}{2^n} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \cos(n-2r)x + \frac{\sqrt{-1}}{2^n} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \sin(n-2r)x$$

Man kann auch

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}(e^{-x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-n}})^n =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} e^{-(n-2r)x\sqrt{-1}} \text{ setzen.}$$

Hieraus folgt wegen

$$e^{-(n-2r)x\sqrt{-1}} = \cos(n-2r)x - \sqrt{-1}\sin(n-2r)x$$

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \cos(n-2r)x$$

$$- \frac{\sqrt{-1}}{2^n} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \sin(n-2r)x.$$

Es ist demnach:

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \cos(n-2r)x$$

$$+ \frac{\sqrt{-1}}{2^n} \sum_{o}^{r} \binom{n}{r} \sin(n-2r)x.$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so ist

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Auch ist $\sin(n-2r) = -\sin(2r-n)$

folglich $\sum_{0}^{r} \binom{n}{r} \sin(n-2r) = -\sum_{0}^{r} \binom{n}{n-r} \sin(2r-n)$.

Aber das Aggregat $\sum_{0}^{r} \binom{n}{r} \sin(n-2r)$ bietet, wenn n eine ganze positive Zahl ist, sobald r größer wird als n, keine Glieder mehr dar, weil dann $\binom{n}{r}$ verschwindet; setzt man also $n-r$ statt r, und läßt $r = 0, 1, 2, 3 \ldots n$ seyn, so erhält man genau dasselbe Aggregat wieder, nur ist die Ordnung seiner Glieder umgekehrt.

Es ist also

$$\sum_{0}^{r} \binom{n}{r} \sin(n-2r) = \sum_{0}^{r} \binom{n}{n-r} \sin[n-2(n-r)]$$

$$= \sum_{0}^{r} \binom{n}{n-r} \sin(2r-n)$$

Aus dieser Gleichung und aus der vorhergehenden folgt:

$$\sum_{0}^{r} \binom{n}{r} \sin(n-2r) = 0.$$

Daher ist für ein ganzes positives n:

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n} \sum_{0}^{r} \binom{n}{r} \cos(n-2r)x.$$

Da nebst der Gleichung $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ auch diese:

$$\cos(n-2r)x = \cos(2r-n)x = \cos[n-2(n-r)]x$$

Statt findet, so sind in dem Aggregate

$$\sum_{0}^{r} \binom{n}{r} \cos(n-2r)x$$

alle vom Anfange und vom Ende desselben gleich weit abstehenden Glieder einander gleich. Man kann daher, da die Anzahl aller Glieder $= n + 1$ ist, und dem ersten derselben der Zeiger 0 zukömmt:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r}\binom{n}{r}\cos(n-2r)x = 2\mathop{\mathfrak{S}}_{0,\frac{n}{2}}^{r}\binom{n}{r}\cos(n-2r)x$$

setzen, wobei aber, wenn n eine gerade Zahl ist, das dem Zeiger $\frac{n}{2}$ entsprechende Glied, da es als das Mittelglied des Aggregates in demselben nur einmal erscheint, durch 2 zu theilen ist.

Dem zufolge wird also für ein ganzes positives n:

$$\cos x^n = \frac{1}{2^{n-1}}\mathop{\mathfrak{S}}_{0,\frac{n}{2}}^{r}\binom{n}{r}\cos(n-2r)x.$$

Wird hier $n = 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ angenommen, so gibt diese Formel:

$$\cos x^2 = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

$$\cos x^3 = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$\cos x^4 = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$$

$$\cos x^5 = \frac{1}{32}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$$

$$\cos x^6 = \frac{1}{64}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)$$

u. s. w.

140.

Die Gleichung

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}(e^{-x\sqrt{-1}} - e^{x\sqrt{-1}})$$

zur nten Potenz erhoben, gibt auf dieselbe Art:

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r}(-1)^r\binom{n}{r}e^{(n-2r)x\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{r} \cos(n-2r)x$$

$$+ \frac{1}{2^n (\sqrt{-1})^{n-1}} \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{r} \sin(n-2r)x$$

oder auch

$$\sin x^n = \frac{(\sqrt{-1})^n}{2^n} \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{r} \cos(n-2r)x$$

$$- \frac{(\sqrt{-1})^{n+1}}{2^n} \sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{r} \sin(n-2r)x$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so muß unterschieden werden, ob n gerade oder ungerade ist.

Ist n gerade, so sind die Zahlen r und n — r zugleich gerade, oder zugleich ungerade, folglich ist

$$(-1)^r = (-1)^{n-r},$$

also aus den bereits in 139 angeführten Gründen

$$(-1)^r \binom{n}{r} \cos(n-2r)x =$$

$$= (-1)^{n-r} \binom{n}{n-r} \cos[n-2(n-r)]x$$

und $(-1)^r \binom{n}{r} \sin(n-2r)x =$

$$= -(-1)^{n-r} \binom{n}{n-r} \sin[n-2(n-r)]x$$

Es tilgen sich demnach in dem Aggregate,

$$\sum_{0}^{r} (-1)^r \binom{n}{r} \sin(n-2r)x$$

alle vom Anfange und vom Ende desselben gleichweit abstehenden Glieder, und das Mittelglied, welches den Factor

$$\sin\left(n - 2 \cdot \frac{n}{2}\right)x = \sin 0$$

enthält, verschwindet für sich, daher wird für $n = 2m$

$$\sin x^{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \sum_{0,m}^{r} (-1)^r \binom{2m}{r} \cos 2(m-r)x$$

wobei aber das letzte Glied des Aggregates durch 2 getheilt werden muß.

Ist n ungerade, so ist n — r mit r, in Bezug auf die Theilbarkeit durch 2, von entgegengesetzter Beschaffenheit, also

$$(-1)^r = -(-1)^{n-r}$$

Es tilgen sich daher die Glieder des Aggregates

$$\sum_{o}^{r} (-1)^r \binom{n}{r} \cos(n-2r)\,x$$

und man findet für $n = 2m+1$

$$\sin x^{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \sum_{o,m}^{r} (-1)^r \binom{2m+1}{r} \sin(2m+1-2r)\,x$$

Diese beiden Formeln geben für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$\sin x^2 = -\frac{1}{2}(\cos 2x - 1)$$

$$\sin x^3 = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$$

$$\sin x^4 = +\frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$$

$$\sin x^5 = +\frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$$

$$\sin x^6 = -\frac{1}{32}(\cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10)$$

$$\sin x^7 = -\frac{1}{64}(\sin 7x - 7\sin 5x + 21\sin 3x - 35\sin x)$$

u. s. w.

# Sechstes Kapitel.

## Von den Facultäten.

141.

Unter der Benennung Facultät oder Factorielle versteht man ein Product gleich zu- oder abnehmender Factoren. Werden diese Factoren nach ihrer Größe geordnet, so heißt der erste derselben die Grundzahl oder die Wurzel der Facultät; der Rest, welcher aus der Subtraction eines Factors von dem nächstfolgenden entspringt, heißt die Differenz, endlich die Anzahl der Factoren der Exponent der Facultät.

Die allgemeine Form einer Facultät ist

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots\ldots[a+(n-1)d]$$

worin a die Grundzahl, d die Differenz und n den Exponenten vorstellt. Die Größe d ist positiv oder negativ, je nachdem die Factoren eine steigende oder eine fallende Progression bilden.

Wir wollen obige Facultät, in Bezug auf welche eine Potenz, deren Wurzel a, und deren Exponent n ist, nur als ein besonderer, der Differenz Null entsprechender Fall erscheint, auch durch ein der üblichen Bezeichnung der Potenzen analoges Symbol andeuten, nämlich durch

$$(a, d)^n.$$

Es ist also $(a, o)^n = a^n$

$$(a, d)^1 = a,\ (a, d)^2 = a(a+d),\ (a, d)^3 = a(a+d)(a+2d)$$

u. s. w.

Das Product der natürlichen Zahlen, von 1 angefangen bis n, nämlich $1 . 2 . 3 . 4 \ldots . (n-1) n$, welches wir bis jetzt durch $n!$ bezeichnet haben, ist eine Facultät, deren Grundzahl und deren Differenz der Einheit gleichkommen. Es ist nämlich

$$n! = (1, 1)^n .$$

Wir werden auch in der Folge für diese häufig vorkommende Facultät das einfachere Zeichen $n!$ beibehalten.

Andere Bezeichnungen der Facultät $(a, d)^n$, welche von mathematischen Schriftstellern gebraucht werden, sind $a^{n|d}$, $a^{n;d}$ u. dgl.

142.

Es ist überhaupt

$$a + r\,d = \frac{a}{b}\left(b + r\,\frac{bd}{a}\right)$$

folglich, wenn man diese Transformation auf jeden Factor der Facultät $(a, d)^n$ anwendet:

$$(a, d)^n = \frac{a^n}{b^n} . b\left(b + \frac{bd}{a}\right)\left(b + 2\frac{bd}{a}\right)\ldots\left(b + (n-1)\frac{bd}{a}\right)$$

oder

$$(a, d)^n = \frac{a^n}{b^n} . \left(b, \frac{bd}{a}\right)^n$$

Setzt man $\frac{bd}{a} = f$, so wird, wenn man in diese Gleichung f statt b einführt:

$$(a, d)^n = \frac{d^n}{f^n}\left(\frac{af}{d}, f\right)^n$$

Diese beiden Formeln setzen uns in den Stand, jede Facultät $(a, d)^n$ auf eine andere zu reduciren, welche eine gegebene Grundzahl b, oder eine gegebene Differenz f enthält.

143.

Schreibt man die Factoren der Facultät

$$(a,d)^n = a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots[a+(n-1)d]$$

in verkehrter Ordnung, so erhält man

$$(a,d)^n = [a+(n-1)d][a+(n-1)d-d]\ldots.$$
$$\ldots.[a+(n-1)d-(n-1)d]$$

das heißt:

$$(a,d)^n = [a+(n-1)d, -d]^n.$$

Trennt man hingegen die Factoren der genannten Facultät irgendwo, z. B. an der Stelle, wo die Factoren $a+(r-1)d$ und $a+rd$ aneinander grenzen, so zerfällt dieselbe in ein Product zweier Facultäten

$$(a,d)^r \text{ und } (a+rd,d)^{n-r},$$

so daß $(a,d)^n = (a,d)^r \cdot (a+rd,d)^{n-r}$ ist.

Auf dieselbe Art läßt sich eine Facultät als ein Product mehrerer Facultäten vorstellen.

Setzt man hier $n-r=v$, oder $n=r+v$, so erhält man die Gleichung

$$(a,d)^r \cdot (a+rd,d)^v = (a,d)^{r+v},$$

welche der Multiplicationsformel für Potenzen analog ist. Man kann daselbst auch r und v verwechseln, so daß

$(a,d)^r \cdot (a+rd,d)^v = (a,d)^v \cdot (a+vd,d)^r = (a,d)^{r+v}$ ist.

144.

Bei den Facultäten kann man, so wie es bei den Potenzen geschieht, fragen, ob es nicht Größen gibt, die, ohne in der oben aufgestellten Definition der Facultäten enthalten zu seyn, doch dieselben Eigenschaften besitzen, wie diese, und also als Facultäten in weiterem Sinne zu betrachten, und derselben Bezeichnung zu unterwerfen sind, wenn man sich nämlich erlaubt, den Exponenten der Facultäten, welche als Factoren-Zähler nur einen ganzen positiven Werth erhalten können, auch negative und gebrochene Werthe beizulegen.

Wir wollen von der Gleichung

$$(a, d)^r \cdot (a+rd, d)^v = (a, d)^{r+v}$$

als dem Ausdrucke der Grundeigenschaft aller Facultäten ausgehen.

Setzen wir in derselben $r = 0$, so finden wir:

$$(a, d)^0 \cdot (a, d)^v = (a, d)^v,$$

$$\text{also } (a, d)^0 = 1;$$

d. h. eine Factorielle mit dem Exponenten o bedeutet, so wie eine Potenz, deren Exponent verschwindet, die Einheit.

Nehmen wir nun $r = -v$, so ergibt sich:

$$(a, d)^{-v} \cdot (a-vd, d)^v = (a, d)^0 = 1,$$

$$\text{also } (a, d)^{-v} = \frac{1}{(a-vd, d)^v},$$

oder wegen

$$(a-vd, d)^v = (a-d, -d)^v \quad (142)$$

$$(a, d)^{-v} = \frac{1}{(a-d, -d)^v}$$

Gleichwie also, wenn v eine ganze positive Zahl vorstellt,

$$(a, d)^v = a(a+d)(a+2d)(a+3d) \ldots\ldots [a+(v-1)d]$$

ist, so ist

$$(a, d)^{-v} = \frac{1}{(a-d)(a-2d)(a-3d) \ldots\ldots (a-vd)}$$

wodurch man zur Bedeutung der Facultäten mit ganzen negativen Exponenten gelangt.

Das hier angewandte Verfahren, welches dem in den Lehrbüchern der Arithmetik bei der Lehre von den Potenzen üblichen Gange analog ist, kann durch folgende Betrachtung anschaulich gemacht werden.

Gibt man dem Exponenten der Facultät $(a, d)^v$ nach und nach die Werthe 1, 2, 3, 4 . . . . . , so erhält man eine Reihe

a, a (a+d), a(a+d) (a+2d), a(a+d) (a+2d) (a+3d) u. ſ. w. deren Glieder mit den Zeigern

1, 2, 3, 4 u. ſ. w.

belegt werden können. Das Bildungsgeſetz dieſer Reihe, wenn man in derſelben von der Linken gegen die Rechte fortſchreitet, beſteht darin, daß jedem Gliede ein Factor, welcher ſich ergibt, indem man das Product aus dem Zeiger dieſes Gliedes mit der Differenz d zur Grundzahl a addirt, zuwachſen muß, um daraus das nächſtfolgende Glied zu erzeugen.

Man kann aber in der angeführten Reihe auch von der Rechten gegen die Linke fortſchreiten, und man erzeugt in dieſem Sinne jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden, wenn man letzteres durch die Summe aus der Grundzahl a und dem Producte der Differenz d mit dem Zeiger des zu ſuchenden Gliedes theilt. Geht man nun auf dieſe Art über das dem Zeiger 1 entſprechende Glied a hinaus, ſo findet man die Glieder, welchen die Zeiger 0, −1, −2, −3 ꝛc. angewieſen werden müſſen; es ergibt ſich nämlich das Glied, welches dem

Zeiger 0 gehört $= \frac{a}{a+0d} = 1$, ferner

jenes, deſſen Zeiger −1 iſt $= \frac{1}{a-d}$,

jenes, deſſen Zeiger −2 iſt $= \frac{1}{(a-d)(a-2d)}$

u. ſ. w.

und allgemein das Glied, welches dem Zeiger −v entſpricht,

$$= \frac{1}{(a-d)(a-2d)(a-3d)\ldots(a-vd)}$$

Man erſieht aus dem hier Geſagten zugleich, was es mit den Facultäten, deren Exponenten gebrochene Zahlen ſind, für eine Bewandtniß habe. Es ſind einzelne mehrerer in obige Reihe eingeſchalteter Glieder, welche ſich untereinander und an die dort

vorfindigen Glieder so anschließen, daß alle zusammen eine demselben Bildungsgesetze unterworfene Reihe darstellen.

Um die Form der Facultäten mit gebrochenen Exponenten zu übersehen, müssen wir dem Ausdrucke $(a, d)^r$ eine andere Gestalt geben, zu welcher uns ebenfalls die Gleichung

$$(a, d)^r \cdot (a+rd, d)^v = (a, d)^{r+v}$$

verhilft. Sie gibt, v mag was immer für eine von r unabhängige Zahl seyn,

$$(a, d)^r = \frac{(a, d)^{r+v}}{(a+rd, d)^v}.$$

Man kann, der Werth von r mag wie immer beschaffen seyn, zwei aufeinander folgende ganze Zahlen g und $g+1$ finden, zwischen welchen r enthalten ist, folglich $r = g + s$ setzen, wobei $s < 1$ ist. Läßt man v auch eine ganze Zahl seyn, und setzt man $g+v = h$, so wird $r+v = h+s$, also

$$(a, d)^{r+v} = (a, d)^{h+s}$$

Da $s < 1$ ist, so fällt $(a, d)^{h+s}$ zwischen $(a, d)^h$ und $(a, d)^{h+1}$, was auch immer h für eine ganze Zahl bedeutet, folglich fällt

$$(a, d)^r \text{ oder } \frac{(a, d)^{r+v}}{(a+rd, d)^v}$$

zwischen die Grenzen

$$\frac{(a, d)^h}{(a+rd, d)^v} \text{ und } \frac{(a, d)^{h+1}}{(a+rd, d)^v}.$$

Läßt man nun v, also auch h, ohne Ende fort wachsen, so kann man, wenigstens in eben dem Sinne, in welchem man bei der Division, wenn gleich der bei jedem einzelnen Schritte erhaltene Rest unendlich wächst, die an der Stelle des Quotienten erscheinende unendliche Reihe als ein diesen Quotienten vorstellendes Rechnungsgebilde betrachtet,

$$(a, d)^r = \frac{a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ \text{ꝛc.}}{[a+rd][a+(r+1)d][a+(r+2)d]\ \ldots\ \text{ꝛc.}}$$

setzen.

147.

Es entſteht nun die Frage, ob eine Facultät mit zweitheiliger Grundzahl a+b, aus den Facultäten mit den einfachen Grundzahlen a und b auch nach demſelben Geſetze gebildet werden könne, wenn der Exponent der erſtern keine ganze poſitive Zahl iſt, d. h. ob die Gleichung

$$(a+b,d)^n = \sum_{0}^{v} \binom{n}{v} (a,d)^{n-v} (b,d)^v$$

für jeden Werth des Exponenten n Statt finde.

Die elementaren analytiſchen Hülfsmittel, auf welche wir uns hier zu beſchränken vorgenommen haben, erlauben uns nur noch den Fall, wenn n eine ganze negative Zahl iſt, zu betrachten, ſo wie wir hier überhaupt auf eine vollſtändige Theorie der Facultäten mit gebrochenen Exponenten, wegen der anderweitigen Lehren, mit welchen ſie zuſammenhängt, Verzicht leiſten müſſen.

Der Satz, daß für ein ganzes n

$$(a+b,d)^{-n} = \sum_{0}^{v} \binom{-n}{v} (a,d)^{-n-v} (b,d)^v$$

geſetzt werden kann, iſt bewieſen, wenn die Richtigkeit dieſer Gleichung für $n = 1$ dargethan, und dann gezeigt wird, daß, wenn genannte Gleichung für irgend einen Werth von n beſteht, ſie auch für den nächſten Werth $n+1$ gilt. Denn ſie gilt dann für $n = 2$, folglich auch für $n = 3$, u. ſ. w. für jedes höhere n.

Es iſt $(a+b,d)^{-1} = \frac{1}{a+b-d}$

und $\frac{1}{a+b-d} = \frac{1}{a-rd} - \frac{b+(r-1)d}{a-rd} \cdot \frac{1}{a+b-d}$

folglich, wenn man zuerſt $r = 1$ ſetzt, dann in das Glied rechter Hand des Gleichheitszeichens den Werth von $\frac{1}{a+b-d}$ für $r=2$

Vertauschen wir in dieser Gleichung

$$n, \quad p, \quad k$$

mit $-\frac{a}{d}, -\frac{b}{d}, n$, so erhalten wir:

$$\sum_{o,n}^{v} \binom{-\frac{a}{d}}{v} \binom{-\frac{b}{d}}{n-v} = \binom{-\frac{a+b}{d}}{n}$$

folglich auch, wenn wir beide Theile der Gleichung mit $(-1)^n d^n n!$ multipliciren:

$$\sum_{o,n}^{v} (-1)^n d^n n! \binom{-\frac{a}{d}}{v} \binom{-\frac{b}{d}}{n-v} =$$

$$= (-1)^n d^n n! \binom{-\frac{a+b}{d}}{n}$$

Es ist aber wegen $\frac{n!}{v!(n-v)!} = \binom{n}{v}$ offenbar:

$$(-1)^n d^n n! = \binom{n}{v} (-1)^{n-v} d^{n-v} (n-v)! (-1)^v d^v v!$$

daher erhält man, wenn man diesen Ausdruck in den linker Hand stehenden Theil der letztern Gleichung einführt, und zugleich nach 145:

$$(a, d)^{n-v}, \quad (b, d)^v, \quad (a+b, d)^n$$

statt

$$(-1)^{n-v} d^{n-v} (n-v)! \binom{-\frac{a}{d}}{n-v}, (-1)^v d^v v! \binom{-\frac{b}{d}}{v},$$

$$(-1)^n d^n n! \binom{-\frac{a+b}{d}}{n}$$

schreibt:

$$\sum_{o,n}^{v} \binom{n}{v} (a, d)^{n-v} (b, d)^v = (a+b, d)^n ;$$

eine Gleichung, welche die Form des binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten an sich trägt, und aus welcher dieser Lehrsatz für gewöhnliche Potenzen als ein specieller Fall, ohne einen Cirkel im Schließen zu begehen, abgeleitet werden kann, wenn man $d = o$ annimmt.

147.

Es entsteht nun die Frage, ob eine Facultät mit zweitheiliger Grundzahl $a+b$, aus den Facultäten mit den einfachen Grundzahlen a und b auch nach demselben Gesetze gebildet werden könne, wenn der Exponent der erstern keine ganze positive Zahl ist, d. h. ob die Gleichung

$$(a+b, d)^n = \sum_{0}^{\nu} \binom{n}{\nu} (a, d)^{n-\nu} (b, d)^{\nu}$$

für jeden Werth des Exponenten n Statt finde.

Die elementaren analytischen Hülfsmittel, auf welche wir uns hier zu beschränken vorgenommen haben, erlauben uns nur noch den Fall, wenn n eine ganze negative Zahl ist, zu betrachten, so wie wir hier überhaupt auf eine vollständige Theorie der Facultäten mit gebrochenen Exponenten, wegen der anderweitigen Lehren, mit welchen sie zusammenhängt, Verzicht leisten müssen.

Der Satz, daß für ein ganzes n

$$(a+b, d)^{-n} = \sum_{0}^{\nu} \binom{-n}{\nu} (a, d)^{-n-\nu} (b, d)^{\nu}$$

gesetzt werden kann, ist bewiesen, wenn die Richtigkeit dieser Gleichung für $n = 1$ dargethan, und dann gezeigt wird, daß, wenn genannte Gleichung für irgend einen Werth von n besteht, sie auch für den nächsten Werth $n+1$ gilt. Denn sie gilt dann für $n = 2$, folglich auch für $n = 3$, u. s. w. für jedes höhere n.

Es ist $(a+b, d)^{-1} = \frac{1}{a+b-d}$

und $\frac{1}{a+b-d} = \frac{1}{a-rd} - \frac{b+(r-1)d}{a-rd} \cdot \frac{1}{a+b-d}$

folglich, wenn man zuerst $r = 1$ setzt, dann in das Glied rechter Hand des Gleichheitszeichens den Werth von $\frac{1}{a+b-d}$ für $r=2$

einführt, und so fort jedes sich fernerhin zeigende $\frac{1}{a+b-d}$ durch ein nächsthöheres r ausdrückt:

$$(a+b,d)^{-1} = \frac{1}{a-d} - \frac{b}{(a-d)(a-2d)}$$

$$+ \frac{b(b+d)}{(a-d)(a-2d)(a-3d)} - \frac{b(b+d)(b+2d)}{(a-d)(a-2d)(a-3d)(a-4d)} + \text{&c.}$$

$$= (a,d)^{-1}(b,d)^0 + \binom{-1}{1}(a,d)^{-2}(b,d)^1$$

$$+ \binom{-1}{2}(a,d)^{-3}(b,d)^2 + \binom{-1}{3}(a,d)^{-4}(b,d)^3 + \text{&c.}$$

$$= \sum_{0}^{v} \binom{-1}{v}(a,d)^{-1-v}(b,d)^v$$

Es besteht also die oben angeführte Gleichung für $n = 1$.

Es sey nun überhaupt

$$(a+b,d)^{-n} = \sum_{0}^{v} \binom{-n}{v}(a,d)^{-n-v}(b,d)^v$$

so ist, wegen

$$(a+b,d)^{-(n+1)} = \frac{(a+b,d)^{-n}}{a+b-(n+1)d} \quad (144)$$

$$(a+b,d)^{-(n+1)} = \sum_{0}^{v} \binom{-n}{v}(a,d)^{-n-v}(b,d)^v \frac{1}{a+b-(n+1)d}$$

Aber es ist

$$\frac{1}{a+b-(n+1)d} = \frac{1}{a-(n+v)d+b+vd-d}$$

$$= [a-(n+v)d+b+vd,d]^{-1}$$

oder, wenn man in dem obigen Ausdrucke für $(a+b,d)^{-1}$ $a-(n+v)d$ statt a, $b+vd$ statt b, und w statt v schreibt:

$$\frac{1}{a+b-(n+1)d} = \sum_{0}^{w} \binom{-1}{w}[a-(n+v)d,d]^{-1-w}(b+vd,d)^w$$

folglich

$$(a+b,d)^{-(n+1)} = \sum_{0}^{v} \left[ \binom{-n}{v} (a,d)^{-(n+v)} (b,d)^{v} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{0}^{w} \binom{-1}{w} [a-(n+v)d,d]^{-1-w} (b+vd,d)^{w} \right]$$

Setzt man die vor dem zweiten Summenzeichen stehenden Factoren hinter dasselbe, und bedenkt man, daß nach 143 und 144

$$(a,d)^{-(n+v)} [a-(n+v)d,d]^{-1-w} = (a,d)^{-(n+1)-(v+w)}$$

und $(b,d)^{v} (b+vd,d)^{w} = (b,d)^{v+w}$ ist,

so findet man, wenn man zugleich $v+w = r$ annimmt, und den Zeiger r statt w einführt:

$$(a+b,d)^{-(n+1)} = \sum_{0}^{r} \left[ (a,d)^{-(n+1)-r} (b,d)^{r} \sum_{0,r}^{w} \binom{-1}{w} \binom{-n}{r-w} \right]$$

Aber es ist (93)

$$\sum_{0,r}^{w} \binom{-1}{w} \binom{-n}{r-w} = \sum_{0,r}^{w} (-1)^{w} \binom{-n}{r-w} = \binom{-n-1}{r}$$

folglich

$$(a+b,d)^{-(n+1)} = \sum_{0}^{r} \binom{-(n+1)}{r} (a,d)^{-(n+1)-r} (b,d)^{r}$$

welcher Ausdruck dasselbe Bildungsgesetz befolgt, welches für $(a+b,d)^{-n}$ angenommen wurde.

Es gilt daher die Gleichung

$$(a+b,d)^{n} = \sum_{0}^{v} \binom{n}{v} (a,d)^{n-v} (b,d)^{v}$$

auch für ganze negative Werthe von n.

## 148.

Wenn die Form des Ausdruckes, welcher eine Facultät mit zweitheiliger Grundzahl durch die Facultäten der beiden Theile angibt, mit jener des binomischen Lehrsatzes für Potenzen übereinstimmt, so muß auch im Allgemeinen eine Facultät mit mehrtheiliger Grundzahl aus den Facultäten der einzelnen Theile derselben nach dem Gesetze des polynomischen Lehrsatzes gebildet werden können.

Die Facultät

$$(a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m,\ d)^n=\left[\sum_{0,m}^{r} a_r,\ d\right]^n$$

kann, wenn man $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m=A_1$ ſetzt, nach dem binomiſchen Satze entwickelt werden.

Es iſt nämlich

$$\left[\sum_{0,m}^{r} a_r,\ d\right]^n=(a_0+A_1,d)^n=\sum_{0}^{r}\binom{n}{r}(a_0,\ d)^{n-r}(A_1,d)^r$$

der Exponent n mag eine ganze poſitive oder negative Zahl ſeyn.

Es ſey nun $a_2+a_3+\ldots..+a_m=A_2$

$a_3+\ldots..+a_m=A_3$

u. ſ. w.

$a_{m-1}+a_m=A_{m-1}$

ſo iſt $A_1=a_1+A_2, A_2=a_2+A_3, A_3=a_3+A_4$, u. ſ. w. folglich durch fortgeſetzte Anwendung des binomiſchen Lehrſatzes für Facultäten:

$$(A_1,\ d)^r=(a_1+A_2,\ d)^r=\sum_{0}^{s}\binom{r}{s}(a_1,\ d)^{r-s}(A_2,\ d)^s$$

$$(A_2,d)^s=(a_2+A_3,\ d)^s=\sum_{0}^{t}\binom{s}{t}(a_2,\ d)^{s-t}(A_3,\ d)^t$$

$$(A_3,\ d)^t=(a_3+A_4,d)^t=\sum_{0}^{u}\binom{t}{u}(a_3,d)^{t-u}(A_4,\ d)^u$$

u. ſ. w.

$$(A_{m-1},d)^v=(a_{m-1}+a_m,\ d)^v=$$

$$\sum_{0}^{w}\binom{v}{w}(a_{m-1},\ d)^{v-w}(a_m,\ d)^w$$

Subſtituirt man jeden dieſer Ausdrücke ſtatt des, in der unmittelbar vorhergehenden Gleichung befindlichen, gleichgeltenden, ſo hat man:

$$(A_1,\ d)^r=\sum_{0}^{s}\sum_{0}^{t}\sum_{0}^{u}\ldots\sum_{0}^{w}\binom{r}{s}\binom{s}{t}\binom{t}{u}\ldots.\binom{v}{w}\times$$

$$\times(a_1,d)^{r-s}(a_2,d)^{s-t}(a_3,d)^{t-u}\ldots(a_{m-1},d)^{v-w}(a_m,d)^w.$$

$$(a, d)^n = a \overset{w}{\underset{0,n-1}{\mathfrak{S}}} a^{n-1-w} \mathfrak{C}_w' [d, 2d, 3d \ldots (n-1)\, d]$$

oder, weil jede zur Klasse w genommene Complexion der Elemente d, 2d, 3d . . . . (n — 1) d den Factor $d^w$ in sich begreift:

$$(a, d)^n = \overset{w}{\underset{0,n-1}{\mathfrak{S}}} a^{n-w} d^w \mathfrak{C}_w [1, 2, 3 \ldots (n-1)]$$

und wenn wir der Kürze wegen

$$\mathfrak{C}_w [1, 2, 3 \ldots (n-1)] = \overset{n}{F}_w \text{ setzen,}$$

$$(a, d)^n = \overset{w}{\underset{0,n-1}{\mathfrak{S}}} \overset{n}{F}_w a^{n-w} d^w.$$

Diese Gleichung drückt die Entwickelung jeder Facultät mit ganzem positiven Exponenten nach Potenzen der Grundzahl und der Differenz aus.

Für $\overset{n}{F}_w$ haben wir nach 109 den independenten Ausdruck

$$\overset{n}{F}_w = \mathfrak{S} \frac{(n, -1)^g}{a!\, b!\, c!\, \text{ꝛc.}\; 2^a\, 3^b\, 4^c\, \text{ꝛc.}}$$

$$[a, b, c \ldots .]$$

$$a + 2b + 3c + \ldots . = w$$

$$a + b + c + \text{ꝛc.} + w = g$$

und nach 53, 3), wenn man die Complexionen von

$$\mathfrak{C}_w [1, 2, 3 \ldots (n-1)],$$

welche das höchste Element n — 1 enthalten, von denjenigen, welche es nicht enthalten, absondert, die Recursionsformel:

$$\overset{n}{F}_w = \overset{n-1}{F}_w + (n-1) \overset{n-1}{F}_{w-1}$$

Diese letztere Formel, bei deren Anwendung man offenbar $\overset{n}{F}_0 = 1$, und $\overset{n}{F}_{-w} = 0$ setzen wird, ist zur Construction einer Tabelle für die Werthe des Coefficienten $\overset{n}{F}_w$ vorzüglich dienlich.

jedoch nur unter der Voraussetzung, daß man in jeder einzelnen Complexion die Wiederholungszeiger der Elemente

$$(a_1, d), (a_2, d), (a_3, d) \ldots\ldots (a_m, d),$$

die Zahlen nämlich, welche anzeigen, wie oft jedes Element in der Complexion vorhanden ist, auf diese Elemente als Facultäts-Exponenten überträgt.

Hieraus ergibt sich endlich:

$$\left[\mathop{\mathfrak{S}}_{0,m}^{r} a_r, d\right]^n =$$

$$= \mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{r} \binom{n}{r} (a_0, d)^{n-r}\, p\mathfrak{C}w_r\, [(a_1, d), (a_2, d) \ldots\ldots (a_m, d)]$$

welche Formel der in 73 erhaltenen analog ist, und für alle Werthe von n zugelassen werden kann, für welche die Binomialformel der Facultäten bewiesen worden ist.

Hat n einen ganzen positiven Werth, so nimmt obiger Ausdruck eine einfachere Form an, nämlich:

$$\left[\mathop{\mathfrak{S}}_{0,m}^{r} a_r, d\right]^n = \mathfrak{S}\, \frac{n!}{a!\, b!\, c! \ldots h!} (a_0, d)^a\, (a_1, d)^b\, (a_2, d)^c \ldots (a_m, d)^h$$

$$[a, b, c \ldots\ldots h]$$

$$a + b + c + \ldots\ldots + h = n$$

$$= p\mathfrak{C}w_n\, [(a_0, d), (a_1, d), (a_2, d) \ldots\ldots (a_m, d)]$$

welche mit der in 68 aufgestellten Form des polynomischen Satzes für Potenzen übereinstimmt.

## Entwickelung der Facultäten nach Potenzen der Grundzahl und der Differenz.

149.

Betrachten wir erstlich die Facultät mit ganzem positiven Exponenten:

$$(a, d)^n = a(a+d)(a+2d)(a+3d) \ldots [a+(n-1)d].$$

Wird die Multiplication der Factoren nach 65 verrichtet, so erhalten wir:

$$(a, d)^n = a \overset{w}{\underset{0,n-1}{\mathfrak{S}}} a^{n-1-w} \mathfrak{C}_w [d, 2d, 3d \ldots (n-1)\, d]$$

oder, weil jede zur Klaſſe w genommene Complexion der Elemente d, 2d, 3d . . . . (n — 1) d den Factor $d^w$ in ſich begreift:

$$(a, d)^n = \overset{w}{\underset{0,n-1}{\mathfrak{S}}} a^{n-w} d^w \mathfrak{C}_w [1, 2, 3 \ldots (n-1)]$$

und wenn wir der Kürze wegen

$$\mathfrak{C}_w [1, 2, 3 \ldots (n-1)] = \overset{n}{F}_w \text{ ſetzen,}$$

$$(a, d)^n = \overset{w}{\underset{0,n-1}{\mathfrak{S}}} \overset{n}{F}_w a^{n-w} d^w.$$

Dieſe Gleichung drückt die Entwickelung jeder Facultät mit ganzem poſitiven Exponenten nach Potenzen der Grundzahl und der Differenz aus.

Für $\overset{n}{F}_w$ haben wir nach 109 den independenten Ausdruck

$$\overset{n}{F}_w = \mathfrak{S} \frac{(n, -1)^g}{a!\, b!\, c!\, \text{ꝛc.}\, 2^a\, 3^b\, 4^c\, \text{ꝛc.}}$$

$$[a, b, c \ldots .]$$

$$a + 2b + 3c + \ldots . = w$$

$$a + b + c + \text{ꝛc.} + w = g$$

und nach 53, 3), wenn man die Complexionen von

$$\mathfrak{C}_w [1, 2, 3 \ldots . (n-1)],$$

welche das höchſte Element n — 1 enthalten, von denjenigen, welche es nicht enthalten, abſondert, die Recurſionsformel:

$$\overset{n}{F}_w = \overset{n-1}{F}_w + (n-1) \overset{n-1}{F}_{w-1}$$

Dieſe letztere Formel, bei deren Anwendung man offenbar $\overset{n}{F}_0 = 1$, und $\overset{n}{F}_{-w} = 0$ ſetzen wird, iſt zur Conſtruction einer Tabelle für die Werthe des Coefficienten $\overset{n}{F}_w$ vorzüglich dienlich.

den $\overset{1}{H}_1$, $\overset{1}{H}_2$ ferner $\overset{2}{H}_1$, $\overset{2}{H}_2$, $\overset{2}{H}_3$ Brüche u. ſ. f. Dieſe Brüche kann man gänzlich vermeiden, wenn man den Coefficienten $\overset{w}{H}_r$ mit der Faoultät $(w+r)!$ multiplicirt, und zugleich $(n,-1)^{w+r}$ durch $(w+r)!$ dividirt, wobei $\frac{(n,-1)^{w+r}}{(w+r)!}$ in den Binomial-Coefficienten $\binom{n}{w+r}$ übergeht.

Setzt man nun $\overset{w}{H}_r\,(w+r)! = \overset{w}{G}_r$, ſo wird

$$\overset{n}{F}_w = \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n}{w+r}$$

Die Eigenſchaften der Binomial-Coefficienten verhelfen hier zu einer ſehr einfachen Recurſionsformel für den Coefficienten $\overset{w}{G}_r$.

Es iſt nämlich nach 75:

$$\binom{n}{w+r} = \binom{n-1}{w+r} + \binom{n-1}{w-1+r}$$

folglich $\overset{n}{F}_w = \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w+r} + \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$.

Nun iſt $\sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w+r} = \overset{n-1}{F}_w$

und $\overset{n}{F}_w = \overset{n-1}{F}_w + (n-1)\,\overset{n-1}{F}_{w-1}$

alſo $(n-1)\,\overset{n-1}{F}_{w-1} = \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$

Andererſeits iſt aber

$$\overset{n-1}{F}_{w-1} = \sum_{1,w-1}^{r} \overset{w-1}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$$

alſo $(n-1)\,\overset{n-1}{F}_{w-1} = \sum_{1,w-1}^{r} \overset{w-1}{G}_r\,(n-1) \binom{n-1}{w-1+r}$

ferner iſt

$$(n-1)\binom{n-1}{w-1+r} = (n-w-r)\binom{n-1}{w-1+r} + (w-1+r)\binom{n-1}{w-1+r}$$

$$= (w+r)\binom{n-1}{w+r} + (w-1+r)\binom{n-1}{w-1+r}$$

daher hat man

$$(n-1)\overset{n-1}{F}_{w-} = \sum_{1,w-1}^{r} (w+r)\overset{w-1}{G}_r \binom{n-1}{w+r} + \sum_{1,w-1}^{r} (w-1+r)\overset{w-1}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$$

Weil sowohl $\overset{w-1}{G}_0$ als auch $\overset{w-1}{G}_w$ die Bedeutung Null haben muß, so kann man

$$\sum_{1,w}^{r} (w-1+r)\overset{w-1}{G}_{r-1}\binom{n-1}{w-1+r}$$

statt $\sum_{1,w-1}^{r} (w+r)\overset{w-1}{G}_r\binom{n-1}{w+r}$

und $\sum_{1,w}^{r} (w-1+r)\overset{w-f}{G}_r\binom{n-1}{w-1+r}$

statt $\sum_{1,w-1}^{r} (w-1+r)\overset{w-1}{G}_r\binom{n-1}{w-1+r}$

schreiben, wodurch man

$$(n-1)\overset{n-1}{F}_{w-1} = \sum_{1,w}^{r} (w-1+r)\left(\overset{w-1}{G}_{r-1} + \overset{w-1}{G}_r\right)\binom{n-1}{w-1+r}$$

erhält.

Stellt man die beiden für $(n-1)\overset{n-1}{F}_{w-1}$ erhaltenen Ausdrücke in eine Gleichung zusammen, so hat man:

$$\sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r} = \sum_{1,w}^{r} (w-1+r)\left(\overset{w-1}{G}_{r-1} + \overset{w-1}{G}_r\right)\binom{n-1}{w-1+r}$$

den $\overset{1}{H}_1$, $\overset{2}{H}_2$ ferner $\overset{1}{H}_2$, $\overset{2}{H}_3$, $\overset{3}{H}_3$ Brüche u. s. f. Diese Brüche kann man gänzlich vermeiden, wenn man den Coefficienten $\overset{w}{H}_r$ mit der Facultät $(w+r)!$ multiplicirt, und zugleich $(n,-1)^{w+r}$ durch $(w+r)!$ dividirt, wobei $\frac{(n,-1)^{w+r}}{(w+r)!}$ in den Binomial-Coefficienten $\binom{n}{w+r}$ übergeht.

Setzt man nun $\overset{w}{H}_r\,(w+r)! = \overset{w}{G}_r$, so wird

$$\overset{n}{F}_w = \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n}{w+r}$$

Die Eigenschaften der Binomial-Coefficienten verhelfen hier zu einer sehr einfachen Recursionsformel für den Coefficienten $\overset{w}{G}_r$.

Es ist nämlich nach 75:

$$\binom{n}{w+r} = \binom{n-1}{w+r} + \binom{n-1}{w-1+r}$$

folglich $\overset{n}{F}_w = \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w+r} + \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$.

Nun ist $\sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w+r} = \overset{n-1}{F}_w$

und $\overset{n}{F}_w = \overset{n-1}{F}_w + (n-1)\,\overset{n-1}{F}_{w-1}$

also $(n-1)\,\overset{n-1}{F}_{w-1} = \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$

Andererseits ist aber

$$\overset{n-1}{F}_{w-1} = \sum_{1,w-1}^{r} \overset{w-1}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$$

also $(n-1)\,\overset{n-1}{F}_{w-1} = \sum_{1,w-1}^{r} \overset{w-1}{G}_r\,(n-1) \binom{n-1}{w-1+r}$

ferner ist

$$(n-1)\binom{n-1}{w-1+r} = (n-w-r)\binom{n-1}{w-1+r} + (w-1+r)\binom{n-1}{w-1+r}$$

$$= (w+r)\binom{n-1}{w+r} + (w-1+r)\binom{n-1}{w-1+r}$$

daher hat man

$$(n-1)\overset{n-1}{F}_{w-} = \sum_{1,w-1}^{r} (w+r)\overset{w-1}{G}_r \binom{n-1}{w+r} + \sum_{1,w-1}^{r} (w-1+r)\overset{w-1}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$$

Weil sowohl $\overset{w-1}{G}_0$ als auch $\overset{w-1}{G}_w$ die Bedeutung Null haben muß, so kann man

$$\sum_{1,w}^{r} (w-1+r)\overset{w-1}{G}_{r-1}\binom{n-1}{w-1+r}$$

statt $\sum_{1,w-1}^{r} (w+r)\overset{w-1}{G}_r \binom{n-1}{w+r}$

und $\sum_{1,w}^{r} (w-1+r)\overset{w-1}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$

statt $\sum_{1,w-1}^{r} (w-1+r)\overset{w-1}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r}$

schreiben, wodurch man

$$(n-1)\overset{n-1}{F}_{w-1} = \sum_{1,w}^{r} (w-1+r)\left(\overset{w-1}{G}_{r-1} + \overset{w-1}{G}_r\right)\binom{n-1}{w-1+r}$$

erhält.

Stellt man die beiden für $(n-1)\overset{n-1}{F}_{w-1}$ erhaltenen Ausdrücke in eine Gleichung zusammen, so hat man:

$$\sum_{1,w}^{r} \overset{w}{G}_r \binom{n-1}{w-1+r} = \sum_{1,w}^{r} (w-1+r)\left(\overset{w-1}{G}_{r-1} + \overset{w-1}{G}_r\right)\binom{n-1}{w-1+r}$$

Dieſe Gleichung iſt aber, wie ihre Form zeigt, eine identiſche, folglich kann man

$$\overset{w}{G}_r = (w-1+r)\left(\overset{w-1}{G}_{r-1} + \overset{w-1}{G}_r\right)$$

ſetzen, wodurch die oben verſprochene Recurſion für $\overset{w}{G}_r$ ausgedrückt wird.

Da $\overset{1}{G}_1 = 1$ iſt, ſo findet man nun leicht:

$$\overset{2}{G}_1 = 2\,\overset{1}{G}_1 = 2; \qquad \overset{2}{G}_2 = 3\,\overset{1}{G}_1 = 3$$

$$\overset{3}{G}_1 = 3\,\overset{2}{G}_1 = 6; \qquad \overset{3}{G}_2 = 4\,(\overset{2}{G}_1 + \overset{2}{G}_2) = 20;$$

$$\overset{3}{G}_3 = 5\,\overset{2}{G}_2 = 15$$

u. ſ. w.

daher iſt $\overset{n}{F}_1 = \binom{n}{2}$

$$\overset{n}{F}_2 = 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

$$\overset{n}{F}_3 = 6\binom{n}{4} + 20\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}$$

u. ſ. w.

151.

Die Facultät mit ganzem negativen Exponenten

$$(a, d)^{-n} = \frac{1}{(a-d)(a-2d)(a-3d)\ldots(a-nd)}$$

$$= \frac{1}{a^n\left(1-\frac{d}{a}\right)\left(1-\frac{2d}{a}\right)\left(1-\frac{3d}{a}\right)\ldots\left(1-\frac{nd}{a}\right)}$$

läßt ſich nach 67 entwickeln. Man findet:

$$(a, d)^{-n} = \frac{1}{a^n}\overset{w}{\underset{0}{\Sigma}}\frac{d^w}{a^w}\,\mathfrak{C}w_w\,(1, 2, 3\ldots n)$$

$$= \overset{w}{\underset{0}{\Sigma}}\,a^{-n-w}\,d^w\,\mathfrak{C}w_w\,(1, 2, 3\ldots n).$$

Bezeichnen wir, der Analogie mit der in 149 geführten Rechnung wegen:

$$\mathfrak{C}w_w\,(1, 2, 3 \ldots . n) \text{ durch } \overset{-n}{F}_w,$$

$$\text{so ist } (a, d)^{-n} = \sum_{0}^{w} \overset{-n}{F}_w\, a^{-n-w}\, d^w.$$

Für $\overset{-n}{F}_w$ gibt 110 den independenten Ausdruck:

$$\overset{-n}{F}_w = \frac{(w+n, -1)^g}{a!\ b!\ c!\ \text{ꝛc.}\ (2!)^a\ (3!)^b\ (4!)^c\ \text{ꝛc.}}$$

$$[a, b, c \ldots .]$$

$$a + 2b + 3c + \ldots . = w$$

$$a + b + c + \text{ꝛc.} + w = g,$$

und 53, 4) die Recursionsformel

$$\overset{-n}{F}_w = \overset{-(n-1)}{F}_w + n\,\overset{-n}{F}_{w-1},$$

bei deren Gebrauch $\overset{-n}{F}_0 = 1$, und $\overset{-n}{F}_{-w} = 0$ gesetzt werden muß.

Folgende, nach dieser Recursionsformel berechnete, Tabelle enthält die ersten Werthe von $\overset{n}{F}_w$.

| n= | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w=0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 |
| 2 | 1 | 7 | 25 | 65 | 140 | 266 | 462 | 750 |
| 3 | 1 | 15 | 90 | 350 | 1050 | 2646 | 5880 | 11880 |
| 4 | 1 | 31 | 301 | 1701 | 6951 | 22827 | 63987 | 159027 |
| 5 | 1 | 63 | 966 | 7770 | 42525 | 179487 | 627396 | 1899612 |
| 6 | 1 | 127 | 3025 | 34105 | 246730 | 1323652 | 5715424 | 20912320 |

Jede Zahl in dieſer Tabelle wird erhalten, wenn man die ihr in horizontaler Richtung nächſtvorhergehende Zahl zu dem Producte der ihr in verticaler Richtung nächſtvorhergehenden mit dem Zeiger der zugehörigen Vertical-Columne addirt.

152.

Das in 150 zur Transformation von $\overset{n}{F}_w$ angewandte Verfahren kann auch auf $\overset{-n}{F}_w$ übertragen werden.

Man ſetze aus den in 150 angeführten Gründen

$$\overset{-n}{F}_w = \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{J}_r \binom{w+n}{w+r}$$

wobei $\overset{w}{J}_r$ ein von n freier Coefficient iſt, ſo findet man wegen

$$\binom{w+n}{w+r} = \binom{w+n-1}{w+r} + \binom{w+n-1}{w-1+r}$$

$$\overset{-n}{F}_w = \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{J}_r \binom{w+n-1}{w+r} + \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{J}_r \binom{w+n-1}{w-1+r}$$

$$= \overset{-(n-1)}{F}_w + \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{J}_r \binom{w+n-1}{w-1+r}.$$

Aber es iſt auch $\overset{-n}{F}_w = \overset{-(n-1)}{F}_w + n \overset{-n}{F}_{w-1}$,

folglich $n \overset{-n}{F}_{w-1} = \sum_{1,w}^{r} \overset{w}{J}_r \binom{w+n-1}{w-1+r}$

Die Gleichung $\overset{-n}{F}_{w-1} = \sum_{1,w-1}^{r} \overset{w-1}{J}_r \binom{w+n-1}{w-1+r}$

gibt $n \overset{-n}{F}_{w-1} = \sum_{1,w-1}^{r} \overset{w-1}{J}_r n \binom{w+n-1}{w-1+r}$

$$= \sum_{1,w-1}^{r} \overset{w-1}{J}_r (n-r+r) \binom{w+n-1}{w-1+r}$$

$$= \sum_{1,w-1}^{r} \overset{w-1}{J}_r (n-r) \binom{w+n-1}{w-1+r} + \sum_{1,w-1}^{r} r \overset{w-1}{J}_r \binom{w+n-1}{w-1+r}$$

## 154.

Eine andere Recurſionsformel für den Coefficienten $\overset{n}{F}_v$ ergibt ſich auf folgende Art:

Es iſt $(a, d)^{n+1} = (a, d)^n (a + n d)$

und $(a, d)^{n+1} = a (a + d, d)^n$

folglich $(a, d)^n (a + n d) = a (a + d, d)^n$.

Iſt nun $(a, d)^n = \overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \overset{n}{F}_w a^{n-w} d^w$,

ſo iſt $(a + d, d)^n = \overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \overset{n}{F}_w (a + d)^{n-w} d^w$

$$= \overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \left[ \overset{n}{F}_w d^w \overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \binom{n-w}{r} a^{n-w-r} d^r \right]$$

$$= \overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \binom{n-w}{r} \overset{n}{F}_w a^{n-(w+r)} d^{w+r},$$

alſo, wenn man $w + r = v$ ſetzt:

$$(a + d, d)^n = \overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \left[ a^{n-v} d^v \overset{w}{\underset{0,v}{\mathfrak{S}}} \binom{n-w}{v-w} \overset{n}{F}_w \right]$$

ferner iſt, wie man aus der in 153 geführten Rechnung erſieht, wenn man dort $n + 1$ ſtatt $n$, und $v$ ſtatt $w$ ſchreibt:

$$(a, d)^n (a + n d) = \overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \left( \overset{n}{F}_v + n \overset{n}{F}_{v-1} \right) a^{n+1-v} d^v$$

Man hat daher die Gleichung:

$$\overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \left( \overset{n}{F}_v + n \overset{n}{F}_{v-1} \right) a^{n+1-v} d^v =$$

$$= \overset{v}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \left[ a^{n+1-v} d^v \overset{w}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} \binom{n-w}{v-w} \overset{n}{F}_w \right]$$

aus welcher, der Identität beider Theile gemäß, wenn man auf die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von $a$ und $d$ ſieht:

$$\overset{n}{F}_v + n \overset{n}{F}_{v-1} = \overset{w}{\underset{0,v}{\mathfrak{S}}} \binom{n-w}{v-w} \overset{n}{F}_w \text{ folgt,}$$

das heißt: $\overset{n}{F}_v + n\overset{n}{F}_{v-1} = \overset{w}{\mathfrak{S}}_{0,v-2} \binom{n-w}{v-w} \overset{n}{F}_w + \binom{n-(v-1)}{1} \overset{n}{F}_{v-1} + \binom{n-v}{0} \overset{n}{F}_v,$

oder $(v-1)\overset{n}{F}_{v-1} = \overset{w}{\mathfrak{S}}_{0,v-2} \binom{n-w}{v-w} \overset{n}{F}_w.$

Schreibt man hier $v+1$ statt $v$, so ergibt sich:

$$v\overset{n}{F}_v = \overset{w}{\mathfrak{S}}_{0,v-1} \binom{n-w}{v+1-w} \overset{n}{F}_w,$$

welche Recursionsformel sowohl für positive, als auch für negative Werthe von n anwendbar ist. Sie zeigt, wie höhere Combinationsklassen der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 .... sowohl ohne, als auch mit Wiederholungen, aus allen niedrigern Combinationsklassen derselben Elemente berechnet werden können.

## Entwickelung der Potenzen nach Facultäten mit einer beliebigen Differenz.

### 155.

Da sich jede Facultät $(a, d)^n$, deren Exponent n eine ganze, positive oder negative Zahl ist, unter der Form eines nach fallenden Potenzen der Grundzahl a, und nach steigenden Potenzen der Differenz d fortschreitenden Ausdruckes, nämlich:

$$(a, d)^n = \overset{w}{\mathfrak{S}}_{0} \overset{n}{F}_w a^{n-w} d^w$$

darstellen läßt, so kann man umgekehrt fragen, ob es nicht etwa möglich wäre, eine Potenz $a^n$, deren Exponent hier eine ganze Zahl seyn mag, bloß durch Facultäten auszudrücken, welche die Wurzel a dieser Potenz zur Grundzahl, und eine gegebene Zahl d zur Differenz haben.

Diese Frage hat offenbar mit dem Problem der Umkehrung der Reihen eine große Aehnlichkeit; wir wollen daher auch die zur Auflösung des letzteren in 84 angewandte Rechnung für unsere gegenwärtige Untersuchung zum Vorbilde wählen.

Dieſem gemäß multipliciren wir die Gleichung

$$(a\,,d)^{n-r} = \sum_{o}^{w} F_w\, a^{n-r-w} d^w$$

mit einem vor der Hand noch unbeſtimmten Factor $U_r\, d^r$, und nehmen beiderſeits in Bezug auf den Zeiger $r$, den wir eine ganze poſitive Zahl ſeyn laſſen, Summen von gleichem Umfange, ſo erhalten wir:

$$\sum_{o}^{r} U_r\, (a,d)^{n-r} d^r = \sum_{o}^{r} \left[ U_r\, d^r \sum_{o}^{w} F_w\, a^{n-r-w} d^w \right]$$

und wenn wir $r + w = v$ ſetzen:

$$\sum_{o}^{r} U_r\, (a\,,d)^{n-r} d^r = \sum_{o}^{v} \left[ a^{n-v} d^v \sum_{o,v}^{w} F_w\, U_{v-w} \right]$$

$$= U_o\, a^n + \sum_{1}^{v} \left[ a^{n-v} d^v \sum_{o,v}^{w} F_w\, U_{v-w} \right]$$

Es ſey nun $U_o = 1$, und für alle Werthe von $v$, welche die Nulle überſteigen:

$$\sum_{o,v}^{w} F_w\, U_{v-w} = 0$$

wodurch eine Recurſion zwiſchen den Werthen von $U_v$ feſtgeſetzt wird, ſo ergibt ſich

$$a^n = \sum_{o}^{r} U_r\, (a\,,d)^{n-r} d^r,$$

welche Gleichung die oben gemachte Forderung erfüllt.

156.

Die Recurſions-Formel

$$\sum_{o,v}^{w} F_w\, U_{v-w} = 0$$

iſt zur Beſtimmung der Werthe von $U_v$ nicht hinreichend einfach, da ſie die Größe $F_w$ als gegeben vorausſetzt. Eine einfachere Recurſionsformel wird erhalten, wenn man die Werthe, welche $U_v$ für zwei unmittelbar aufeinander folgende Exponenten $n-1, n$ annimmt, mit einander vergleicht. Um jedoch die

Abhängigkeit der Größe $U_r$ von n ersichtlich zu machen, schreibe man $\overset{n}{U}_r$ statt $U_r$, so daß

$$a^n = \sum_{o}^{r} \overset{n}{U}_r \, (a, d)^{n-r} \, d^r \text{ ist.}$$

Hieraus folgt

$$a^{n-1} = \sum_{o}^{r} \overset{n-1}{U}_r \, (a, d)^{n-1-r} \, d^r$$

Es ist aber $a^n = a \, . \, a^{n-r}$, also

$$a^n = \sum_{o}^{r} \overset{n-1}{U}_r \, a \, (a, d)^{n-1-r} \, d^r \, .$$

Statt $a(a, d)^{n-1-r}$ kann man

$$[a + (n-1-r)d - (n-1-r)d] \, (a,d)^{n-1-r} =$$

$$= (a,d)^{n-r} - (n-1-r)d \, . \, (a,d)^{n-1-r} \text{ setzen;}$$

daher wird

$$a^n = \sum_{o}^{r} \overset{n-1}{U}_r \, (a, d)^{n-r} \, d^r - \sum_{o}^{r} (n-1-r) \overset{n-1}{U}_r \, (a,d)^{n-1-r} d^{r+1}$$

und wenn man $\overset{n-1}{U}_{-1} = o$ gelten läßt:

$$a^n = \sum_{o}^{r} \overset{n-1}{U}_r \, (a, d)^{n-r} d^r - \sum_{o}^{r} (n-r) \overset{n-1}{U}_{r-1} (a,d)^{n-r} \, d^r$$

$$= \sum_{o}^{r} \left( \overset{n-1}{U}_r - (n-r) \overset{n-1}{U}_{r-1} \right) (a, d)^{n-r} \, d^r$$

Vergleicht man diesen und den oberen Ausdruck für $a^n$ so findet man

$$\overset{n}{U}_r = \overset{n-1}{U}_r - (n-r) \overset{n-1}{U}_{r-1},$$

welche Gleichung höhere Werthe von $\overset{n}{U}_r$ aus niedrigern mit Leichtigkeit zu berechnen verstattet.

Eine aufmerksamere Betrachtung dieser Gleichung führt auch sogleich zur näheren Kenntniß der Bedeutung von $\overset{n}{U}_r$.

Wir müssen hier aber die Fälle, wenn n positiv und negativ ist, von einander unterscheiden.

Wäre $\overset{n}{U}_r$, insofern n eine ganze positive Zahl bedeutet, die Summe der Combinationen der Elemente

$$-1, -2, -3, -4 \text{ ꝛc. } -(n-r)$$

zur rten Klasse mit Wiederholungen, so würde nach 53, 4) für diese Größe genau die oben erhaltene Recursionsformel Statt finden.

Läßt sich nun die Gleichung

$$\overset{n}{U}_r = \mathfrak{C}w_r\,[-1, -2, -3 \ldots -(n-r)]$$

für den Fall $r = 0$ rechtfertigen, so gilt dieselbe für jeden Werth von r, was durch dieselben Schlüsse bewiesen werden kann, mittelst welcher in 110 die Gleichheit der dort vorkommenden Größen $\overset{n}{J}_r$ und $\overset{n}{C}_r$ begründet wurde. Es ist aber $\overset{n}{U}_0 = 1$ und

$$\mathfrak{C}w_0\,[-1, -2, -3 \ldots -(n-r)] = 1$$

folglich hat man überhaupt

$$\begin{aligned}\overset{n}{U}_r &= \mathfrak{C}w_r\,[-1, -2, -3 \ldots -(n-r)] \\ &= (-1)^r\,\mathfrak{C}w_r\,[1, 2, 3 \ldots (n-r)]\end{aligned}$$

oder, mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\overset{-n}{F}_w$ in 151

$$\overset{+n}{U}_r = (-1)^r \cdot \overset{-(n-r)}{F}_r$$

Setzt man ferner in der Gleichung

$$\overset{n}{U}_r = \overset{n-1}{U}_r - (n-r)\,\overset{n-1}{U}_{r-1}$$

um den Fall, wenn n eine ganze negative Zahl vorstellt, in Erwägung zu ziehen, $-(n-1)$ statt n, so hat man

$$\overset{-(n-1)}{U}_r = \overset{-n}{U}_r + (n+r-1)\,\overset{-n}{U}_{r-1}$$

oder

$$\overset{-n}{U}_r = \overset{-(n-1)}{U}_r - (n+r-1)\,\overset{-n}{U}_{r-1}$$

An dieselbe Recursion ist die Summe der Combinationen der Elemente $-1, -2, -3 \ldots -(n+r-1)$ zur rten Klasse ohne Wiederholungen gebunden; auch ist

$$\overset{-n}{U}_0 = \mathfrak{C}_0\,[-1, -2, -3 \ldots -(n+r-1)] = 1$$

folglich ist man berechtigt

$$\overset{-n}{U}_r = \mathfrak{C}_r\,[-1, -2, -3 \ldots -(n+r-1)]$$
$$= (-1)^r\,\mathfrak{C}_r\,[1, 2, 3 \ldots (n+r-1)]$$

oder was dasselbe ist,

$$\overset{-n}{U}_r = (-1)^r\,\overset{+n+r}{F}_r \text{ zu setzen.}$$

Da aber dieser Ausdruck aus dem oben für $\overset{+n}{U}_r$ gefundenen hervorgeht, wenn man das Zeichen von n ändert, so gilt die Gleichung

$$\overset{n}{U}_r = (-1)^r\,\overset{-n+r}{F}_r$$

sowohl für positive, als auch für negative Werthe der Zahl n.

Man kann also die im Vorigen abgeleiteten Eigenschaften der Größen von der Form $\overset{n}{F}_r$ auf die Größen von der Form $\overset{n}{U}_r$ übertragen.

Die obigen Gleichungen zeigen auch, daß, wenn n einen ganzen positiven Werth erhält, die Größe $\overset{n}{U}_r$ verschwindet, sobald r größer wird, als n—1, und daß $\overset{n}{U}_{n-1} = 1$ ist.

Es ist also für positive ganze Exponenten

$$a^n = \sum_{0,n-1}^{r}\overset{n}{U}_r\,(a,d)^{n-r}\,d^r$$

Ist hingegen n eine negative Zahl, so läuft die Reihe für $a^n$ ohne Ende fort.

Aus allen bis hieher angestellten Untersuchungen leuchtet übrigens die analytische Wichtigkeit der Combinationen der natürlichen Zahlen, sowohl ohne, als auch mit Wiederholungen, hinreichend hervor, so daß wir eine Zusammenstellung ihrer im Vorigen an mehreren Orten bewiesenen merkwürdigen Eigenschaften, dem aufmerksamen Leser überlassen können.

## Summirung gleichnamiger Potenzen der Glieder einer arithmetischen Progression durch Facultäten.

### 157.

Die Formel, welche die Potenzen durch Facultäten ihrer Wurzeln ausdrückt, kann auf die Summirung der Reihe

$$a^n + (a+d)^n + (a+2d)^n + (a+3d)^n + \text{ꝛc.} + (a+xd)^n = \sum_{0,x}^{v} (a+vd)^n$$

angewendet werden.

Es ist nämlich nach 155. 156

$$(a+vd)^n = \sum_{0}^{r} U_r\,(a+vd,d)^{n-r}\,d^r$$

folglich

$$\sum_{0,x}^{v} (a+vd)^n = \sum_{0}^{r} \left[ U_r\,d^r \sum_{0,x}^{v} (a+vd,d)^{n-r} \right].$$

Wir wollen nun das Aggregat

$$\sum_{0,x}^{v} (a+vd,d)^{n-r}$$

auf einen einfachen Ausdruck zu reduciren suchen.

Aus der Grundeigenschaft der Facultäten folgt, m mag was immer für eine Zahl bedeuten:

$$(a+vd,d)^{m+1} = (a+vd,d)^m\,[a+(v+m)d]$$
$$= (a+vd,d)^m\,[a+(v-1)d] + (a+vd,d)^m\,.\,(m+1)d$$

Aber es ist für jedes m

$$(a+vd,d)^m\,[a+(v-1)d] = [a+(v-1)d,d]^{m+1}$$

daher

$$(a+vd,d)^{m+1} = [a+(v-1)d,d]^{m+1} + (m+1)d\,(a+vd,d)^m$$

oder

$$(m+1)d\,(a+vd,d)^m = (a+vd,d)^{m+1} - [a+(v-1)d,d]^{m+1}$$

folglich

$$(m+1)\,d\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}(a+vd,d)^m =$$

$$=\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}(a+vd,d)^{m+1}-\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}[a+(v-1)d,d]^{m+1}$$

Allein es ist:

$$\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}(a+vd,d)^{m+1}=\overset{v}{\underset{0,x-1}{\mathfrak{S}}}(a+vd,d)^{m+1}+(a+xd,d)^{m+1}$$

$$\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}[a+(v-1)d,d]^{m+1}=(a-d,d)^{m+1}+\overset{v}{\underset{1,x}{\mathfrak{S}}}[a+(v-1)d,d]^{m+1}$$

$$=(a-d,d)^{m+1}+\overset{v}{\underset{0,x-1}{\mathfrak{S}}}(a+vd,d)^{m+1}$$

also

$$\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}(a+vd,d)^{m+1}-\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}[a+(v-1)d,d]^{m+1}=$$

$$=(a+xd,d)^{m+1}-(a-d,d)^{m+1}$$

folglich, wenn man dieses Resultat in obige Gleichung substituirt, und $\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}(a+vd,d)^m$ sucht:

$$\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}(a+vd,d)^m=\frac{(a+xd,d)^{m+1}-(a-d,d)^{m+1}}{(m+1)d}$$

Nimmt man nun $m=n-r$, so erhält man:

$$\overset{v}{\underset{0,x}{\mathfrak{S}}}(a+vd)^n=\overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}\left[\frac{\overset{n}{U}_r\,d^{r-1}}{n-r+1}[(a+xd,d)^{n-r+1}-(a-d,d)^{n-r+1}]\right]$$

wobei $\overset{n}{U}_r=(-1)^{r}\overset{-n+r}{F}_r$ ist, und aus Tafeln, die nach der oben ertheilten Anweisung zu berechnen sind, genommen werden könnte.

Es sey, um einen specielleren Fall vor Augen zu haben, $a=1$, $d=1$; ferner sey $n$ eine ganze positive Zahl, und statt $x$ werde $x-1$ gesetzt, so findet man, da hier $r$ nicht größer werden kann, als $n-1$:

$$\overset{v}{\underset{o,x-1}{\mathfrak{S}}} (1+v)^n \text{, oder was daſſelbe iſt,}$$

$$\overset{v}{\underset{1,x}{\mathfrak{S}}} v^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \text{ꝛc} + x^n$$

$$= \overset{r}{\underset{o,n-1}{\mathfrak{S}}} \left[ \frac{\overset{n}{U_r}}{n-r+1} [(x,1)^{n-r+1} - (o,1)^{n-r+1}] \right]$$

Aber $(o,1)^{n-r+1}$ verſchwindet, weil $n-r+1$ ſtets eine ganze poſitive Zahl iſt; daher hat man:

$$\overset{v}{\underset{1,x}{\mathfrak{S}}} v^n = \overset{r}{\underset{o,n-1}{\mathfrak{S}}} \frac{\overset{n}{U_r} (x,1)^{n-r+1}}{n-r+1}.$$

welche Formel wegen

$$\overset{n}{U_r} = \overset{-(n-r)}{F_r} = (-1)^r \, \mathfrak{Cw}_r \, [1, 2, 3 \ldots . (n-r)]$$

auch ſo ausgedrückt werden kann:

$$\overset{v}{\underset{1,x}{\mathfrak{S}}} v^n = \overset{r}{\underset{o,n-1}{\mathfrak{S}}} \frac{(-1)^r}{n-r+1} \, \mathfrak{Cw}_r \, [1, 2, 3 \ldots (n-r)] (x,1)^{n-r+1}$$

Setzt man hingegen $a = x$, $d = -1$, ſo ergibt ſich:

$$\overset{v}{\underset{o,x}{\mathfrak{S}}} (x-v)^n \text{, oder}$$

$$\overset{v}{\underset{1,x}{\mathfrak{S}}} v^n = \overset{r}{\underset{o,n-1}{\mathfrak{S}}} \left[ \frac{\overset{n}{U_r} (-1)^{r-1}}{n-r+1} [(o,-1)^{n+r-1} - (x+1,-1)^{n-r+1}] \right]$$

$$= \overset{r}{\underset{o,n-1}{\mathfrak{S}}} \frac{(-1)^r \overset{n}{U_r}}{n-r+1} (x+1,-1)^{n-r+1}$$

$$= \overset{r}{\underset{o,n-1}{\mathfrak{S}}} \frac{1}{n-r+1} \, \mathfrak{Cw}_r \, [1,2,3 \ldots (n-r)] (x+1,-1)^{n-r+1}$$

Setzt man $n-r = w$, ſo erhält dieſe Gleichung die Geſtalt:

$$\overset{v}{\underset{1,x}{\mathfrak{S}}} v^n = \overset{w}{\underset{1,n}{\mathfrak{S}}} \frac{1}{w+1} \, \mathfrak{Cw}_{n-w} \, [1,2,3 \ldots w] (x+1,-1)^{w+1}$$

Drückt man aber $\mathfrak{Cw}_{n-w}$ $(1, 2, 3 \ldots w)$ nach der erſtern der in 110 gegebenen Formeln durch ein combinatoriſches

Aggregat aus, so wird, wenn man die beiden Summenzeichen in eines zusammenzieht:

$$\overset{v}{\underset{1,x}{\mathfrak{S}}} v^n = \mathfrak{S} \frac{n!\,(x+1,-1)^{w+1}}{(w+1)\,a!\,b!\,c!\,\text{ꝛc.}\,(1!)^a\,(2!)^b\,(3!)^c\,\text{ꝛc.}}$$

$$[a,\ b,\ c\ \ldots\ldots\ w]$$

$$a + 2b + 3c + \ldots\ldots = n$$

$$a + b + c + \ldots\ldots = w$$

eine Formel, welche, so wie die meisten Hauptsätze der Theorie der Facultäten, den Bemühungen Kramp's ihren Ursprung verdankt.

# Siebentes Kapitel.

## Eigenschaften der algebraischen Ausdrücke in Bezug auf die gegenseitige Vertauschung darin vorkommender unbestimmter Größen.

158.

Wenn man in einem algebraischen Ausdrucke einige der darin enthaltenen unbestimmten Größen auf alle möglichen Arten untereinander verwechselt, so daß sämmtliche arithmetische Operationen, welche die Form dieses Ausdruckes mit einer derselben vorzunehmen vorschreibt, wie es die Verwechslung gedachter Größen mit sich bringt, auf eine andere übertragen werden: so bleibt der Ausdruck entweder stets der nämliche, indem die vorgenommene Verwechslung der ihm zum Grunde liegenden Größen höchstens eine Veränderung der Ordnung zur Folge hat, in welcher die einzelnen Glieder desselben erscheinen; oder der Ausdruck ändert sich bei allen, oder auch nur bei einigen der erwähnten Verwechslungen, indem dabei Glieder entstehen, welche früher nicht vorhanden waren.

Ein algebraischer Ausdruck, welcher sich bei keiner gegenseitigen Vertauschung einiger in demselben vorkommender unbestimmter Größen verändert, heißt in Bezug auf diese Größen ein symmetrischer; findet aber das Gegentheil Statt,

so wird der Ausdruck in Bezug auf die Größen, über welche sich die Verwechslung erstreckt, ein unsymmetrischer genannt.

Bezeichnen wir alle Größen eines Ausdruckes, welche der Verwechslung unterliegen, der leichtern Uebersicht wegen, durch einen der letztern Buchstaben des Alphabets, z. B. durch x, welchem wir, um die einzelnen Größen von einander zu unterscheiden, die gewöhnlichen Zeiger anhängen, so sind

$$x_1^3 x_2^5 + x_1^5 x_2^3 + x_1^3 x_3^5 + x_1^5 x_3^3 + x_2^3 x_3^5 + x_2^5 x_3^3,$$
$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 6(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2)$$

symmetrische; hingegen

$$x_1^3 x_2^5 + x_3^8 \; ; \; x_1^4 + x_2^4 + 5 x_1 x_2 x_3^2$$

unsymmetrische Ausdrücke der Größen $x_1$, $x_2$, $x_3$. Unter den beiden letztern ändert sich $x_1^3 x_2^5 + x_3^8$ bei jeder Verwechslung von $x_1$, $x_2$, $x_3$; der andere $x_1^4 + x_2^4 + 5 x_1 x_2 x_3^2$ ändert sich nicht, wenn man $x_1$ mit $x_2$, sondern nur, wenn man $x_1$ mit $x_3$ oder $x_2$ mit $x_3$ vertauscht.

Bei den so eben gegebenen Erklärungen haben wir jedoch immer die größte Allgemeinheit der Werthe der zu verwechselnden Größen vor Augen, so daß wir von den Wirkungen einzelner numerischer Bestimmungen derselben gänzlich abstrahiren.

In der That ist es nicht schwer sich zu überzeugen, daß es Ausdrücke gibt, welche bei einer beliebigen Verwechslung gewisser darin vorkommender Größen unverändert bleiben, sobald man diesen Größen festgesetzte Werthe beilegt; jedoch sich sogleich ändern, wenn man dieselben durch andere Zahlen ersetzt.

So geht z. B. der Ausdruck $x_1 x_2 + x_3 x_4 - 3 x_1^2$, wenn man $x_1$ mit $x_4$ verwechselt, in $x_2 x_4 + x_1 x_3 - 3 x_4^2$ über, und im Allgemeinen ist keineswegs

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 - 3 x_1^2 = x_2 x_4 + x_1 x_3 - 3 x_4^2.$$

Setzt man aber $x_1 = 2$, $x_4 = 3$ und $x_2 - x_3 = 15$, also z. B. $x_2 = 16$, $x_3 = 1$, so werden beide Ausdrücke einander gleich. Die Rechnung gibt wirklich:

$$2 \cdot 16 + 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2^4 = 23$$
$$\text{und } 3 \cdot 16 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3^4 = 23$$

159.

Die symmetrischen Ausdrücke lassen sich in einfache und in zusammengesetzte abtheilen. Erstere enthalten nicht mehr Glieder, als zum Bestehen ihrer Symmetrie erforderlich sind, und lassen sich daher in keine Theile zerlegen, welche, für sich allein betrachtet, symmetrische Ausdrücke wären; bei den letztern findet das Gegentheil Statt, sie bestehen nämlich aus einfachen symmetrischen Ausdrücken.

So ist z. B. der erste der in 158 angeführten symmetrischen Ausdrücke ein einfacher, der andere aber ist ein zusammengesetzter, und besteht aus den einfachen Ausdrücken

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ und $6\,(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x^2 + x_2^2 x_3^2)$.

160.

Wenn ein einfacher symmetrischer, auf n Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ sich beziehender, Ausdruck das Product

$$x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_r$$

zu einem Gliede hat, wobei r nicht größer ist, als n, so erhält man sämmtliche Glieder dieses Ausdruckes, indem man alle Combinationsformen der n Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ zur rten Klasse ohne Wiederholungen bildet, und den gut geordneten Elementen derselben die r Exponenten a, b, c . . . . f in allen möglichen Versetzungen beilegt. Denn dieser Ausdruck soll sich durch keine gegenseitige Vertauschung der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ verändern; in demselben müssen also wegen des Gliedes $x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_r^f$ alle verschiedenen Producte als Glieder erscheinen, welche aus $x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_r^f$ durch jede mögliche Verwechslung der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_r$ sowohl unter sich, als auch mit den übrigen

$$x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3} \ldots x_n$$

entstehen können, damit bei jeder dieser Vertauschungen ein Glied vorhanden sey, in welches $x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_r^f$ übergeht, und welches sich wieder umgekehrt in $x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_r^f$ verwandelt. Diese Producte werden aber gerade durch das so eben angegebene Verfahren erzeugt.

Da aber jede unter den Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ denkbare Vertauschung in jedem der genannten Producte nichts weiter zur Folge hat, als daß darin andere der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ mit veränderter Stellung der Exponenten vorkommen; so ist, man mag diese Größen wie immer unter einander vertauschen, für jedes der durch obiges Verfahren erzeugten Glieder ein Gegenglied vorhanden, in welches es sich verwandelt, und durch welches es wieder zurück erzeugt wird.

Es sind also dem Ausdrucke, wovon $x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_r^f$ ein Glied seyn soll, nicht mehr und nicht weniger Glieder ertheilt worden, als zum Bestehen seiner Symmetrie unentbehrlich sind, so, daß dieser Ausdruck nothwendig ein einfacher symmetrischer seyn wird.

Hat das Glied $x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_r^f$ einen, von den n Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ unabhängigen, Coefficienten, so muß derselbe offenbar allen übrigen Gliedern des durch ersteres Glied bestimmten einfachen symmetrischen Ausdruckes unverändert zukommen.

161.

Die Anzahl der Glieder eines einfachen symmetrischen aus n Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ gebildeten Ausdruckes, wovon $x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_r^f$ ein Glied ist, wird also durch das Product der Anzahl der Combinationen dieser n Größen ohne Wiederholungen zur rten Klasse mit der Anzahl der Permutationen der Exponenten a, b, c . . . f dargestellt. Sind daher diese

Exponenten von einander durchaus verſchieden, ſo iſt die Anzahl der Glieder dieſes Ausdruckes

$$= \binom{n}{r} r! = (n,-1)^r$$

Kommen aber unter jenen Exponenten $\alpha$ gleiche, $\beta$ andere gleiche, $\gamma$ wieder andere gleiche u. ſ. w. vor, ſo iſt die Anzahl der Glieder dieſes Ausdruckes

$$= \binom{n}{r} \cdot \frac{r!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\text{ꝛc.}} = \frac{(n,-1)^r}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\text{ꝛc.}}$$

162.

Um alle möglichen gegenſeitigen Vertauſchungen der Größen, welche in irgend einem Ausdrucke erſcheinen, wirklich zu bewerkſtelligen, betrachte man dieſe Größen als Elemente einer Complexion, permutire ſie, und beziehe alle Glieder des Ausdruckes, in welchen eine beſtimmte Größe enthalten iſt, auf eine beſtimmte Stelle der erzeugten Permutationsformen, ſo daß man die Größen, welche ſich in dieſer Stelle zeigen, nach und nach in jene Glieder ſetzt, während man mit den übrigen Gliedern des Ausdruckes, von Permutationsform zu Permutationsform, auf eine übereinſtimmende Weiſe verfährt.

Iſt der vorgelegte Ausdruck ein unſymmetriſcher, ſo kann er dieſem zufolge, bei dem gegenſeitigen Verwechſeln der darin vorkommenden Größen, höchſtens ſo viele verſchiedene Formen annehmen, als es Permutationen dieſer Größen gibt; alſo höchſtens n! Formen, wenn die Anzahl der Größen durch n vorgeſtellt wird.

Es kann aber ein unſymmetriſcher Ausdruck mit n Größen, bei allen Vertauſchungen derſelben, auch weniger als n! verſchiedene Formen annehmen; daher wird es nicht unintereſſant ſeyn, die Beſchaffenheit der Anzahl dieſer Formen in ſo weit kennen zu lernen, als dieß, ohne die Natur des Ausdruckes ſelbſt näher zu beſtimmen, möglich iſt.

163.

Die Anzahl der verschiedenen Formen, welche ein algebraischer unsymmetrischer Ausdruck bei allen Permutationen darin vorkommender n Größen darbietet, ist ein Theiler der Permutationszahl n! dieser Größen.

Man denke sich alle Formen des vorgelegten Ausdruckes für die n Permutationen der darin enthaltenen Größen gebildet, und theile diese Formen in Parthien ab, deren jede bloß identische Formen in sich begreift, während die Formen verschiedener Parthien von einander abweichen; so müssen jeder dieser Parthien gleichviel Formen jenes Ausdruckes zu Theil werden. Denn betrachtet man eine Form F, welche von den bereits in eine Parthie zusammengestellten identischen Formen, deren Anzahl r seyn mag, verschieden ist, so lassen sich immer noch r—1 mit F übereinstimmende Formen finden, so daß man hiedurch wieder eine Parthie von r identischen Formen erhält. Es seyen nämlich $X_1$, $X_2$, $X_3$ .... $X_r$ die Permutationen der im erwähnten Ausdrucke befindlichen Größen, welche den r Formen der ersten Parthie zum Grunde liegen, und $Y_1$ sey eine, von $X_1$, $X_2$, $X_3$ .... $X_r$ verschiedene, Permutation, welcher die Form F entspricht; ferner bilde man $Y_2$ aus $Y_1$, $Y_3$ aus $Y_2$, $Y_4$ aus $Y_3$ u. s. w. nach denselben Permutationsgesetzen, nach welchen $X_2$ aus $X_1$, $X_3$ aus $X_2$, $X_4$ aus $X_3$ u. s. w, entsteht, so werden alle auf die r Permutationen $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ .... $Y_r$ gegründeten Formen des gegebenen Ausdruckes aus demselben Grunde einander gleich seyn, aus welchem die den Permutationen $X_1$, $X_2$, $X_3$ .... $X_r$ zugehörigen Formen identisch sind; denn die einmal vorhandene Gleichheit zweier Formen eines Ausdruckes besteht fort, die Werthe der verwechselten Größen mögen welche immer seyn, wenn nur die Art der Verwechslung genau dieselbe bleibt. Man sieht also, daß jede der erwähnten Parthien nicht weniger identische Formen enthalten kann, als jede andere Parthie, d. h.

alle dieſe Parthien beſtehen aus gleichviel, nämlich aus r, Formen.

Iſt nun f die Anzahl aller Parthien, ſo muß $fr=n!$ ſeyn, daher iſt f ein Theiler von n!. Aber f iſt zugleich die Anzahl der verſchiedenen Formen, welche der gegebene Ausdruck bei allen n! Permutationen ſeiner Größen anzunehmen vermag; folglich iſt dieſe Anzahl, wie oben behauptet wurde, ein Theiler der Permutationszahl dieſer Größen.

164.

Soll die Anzahl f der verſchiedenen Formen, welche ein unſymmetriſcher Ausdruck durch das Permutiren der darin befindlichen Größen erhält, kleiner ſeyn, als die größte, n nicht überſteigende, Primzahl p, wobei $p > 2$ gedacht wird, ſo iſt nothwendig $f = 2$.

Es läßt ſich erſtlich beweiſen, daß der vorgelegte Ausdruck unter dieſen Vorausſetzungen nicht geändert wird, wenn man p der Größen desſelben nach irgend einem einfachen Permutationsgeſetze (19) unter einander vertauſcht.

Zwei Complexionen, deren eine aus der andern nach einem einfachen, p Elemente in Anſpruch nehmenden, Permutationsgeſetze entſpringt, beſtimmen eine aus p Complexionen beſtehende Periode (23). Denkt man ſich alle den Complexionen dieſer Periode entſprechenden Formen des gegebenen Ausdruckes gebildet, ſo müſſen unter denſelben, weil $p > f$ iſt, wenigſtens zwei identiſche vorkommen. Läßt man die Complexionen, auf welche ſich dieſe zwei identiſchen Formen beziehen, unmittelbar auf einander folgen, ſo beſtimmen ſie eine zweite Periode, welche aber, da p eine Primzahl iſt, nach 26, aus denſelben, nur in eine andere Ordnung geſtellten Complexionen, wie die erſtere, beſteht. Die Art der Vertauſchung der Elemente iſt, wenn man in einer Periode von jeder Complexion zur nächſten fortſchreitet, immer dieſelbe; die Gleichheit zweier Formen des Ausdruckes wird aber nicht durch die vertauſchten Größen, ſon-

dern nur durch die Art ihrer Vertauschung bedingt: daher sind alle Formen des gegebenen Ausdruckes, bei welcher sich die Verwechslung der darin vorkommenden Größen nach den Complexionen der zweiten Periode richtet, identisch. Es befinden sich aber unter diesen Formen auch jene, welche aus den zwei anfänglich betrachteten Complexionen der zu vertauschenden Größen entstehen; daher sind jede zwei Formen des vorgelegten Ausdruckes, welche durch ein einfaches, auf p Größen angewendetes, Permutationsgesetz mit einander verknüpft werden, identisch.

Wie in 28 bewiesen worden ist, kann zu zwei Complexionen, wovon eine aus der andern nach einem einfachen, sich auf p Elemente erstreckenden Permutationsgesetze entspringt, immer eine dritte Complexion gefunden werden, welche aus der zweiten ebenfalls nach einem einfachen, sich auf dieselben p Elemente beziehenden Permutationsgesetze hervorgeht, jedoch von der ersten Complexion bloß in der Stellung dreier gegebener Elemente abweicht.

Hieraus erhellet offenbar, daß der gegebene Ausdruck ungeändert bleibt, wenn man was immer für drei der in demselben enthaltenen Größen unter einander verwechselt.

Dieser letztere Umstand zeigt an, daß der erwähnte, der Voraussetzung zufolge unsymmetrische, Ausdruck bei allen gegenseitigen Vertauschungen der n Größen nur zweier verschiedener Formen fähig ist.

Denn ist A die Form dieses Ausdruckes für eine bestimmte Stellung dreier beliebiger seiner n Größen, z. B. der Größen $x_1$, $x_2$, $x_3$, welche Form also ungeändert bleibt, man mag diese drei Größen auf die eine oder auf die andere der überhaupt möglichen zwei Arten (28) mit einander vertauschen, d. h. man mag $x_2$ statt $x_1$, $x_3$ statt $x_2$, und $x_1$ statt $x_3$, oder man mag $x_3$ statt $x_1$, $x_1$ statt $x_2$, und $x_2$ statt $x_3$ setzen, was wir der Kürze wegen durch die Gleichung

$[x_1, x_2, x_3] = [x_2, x_3, x_1] = [x_3, x_1, x_2] = A$

andeuten wollen; geht ferner der anfängliche Ausdruck

$$[x_1, x_2, x_3] = A$$

in $[x_2, x_1, x_3] = B$

über, wenn man bloß $x_1$ mit $x_2$ verwechselt, so muß, indem man die drei bezeichneten Größen in B untereinander vertauscht, aus den oben angeführten Gründen ebenfalls

$[x_2, x_1, x_3] = [x_1, x_3, x_2] = [x_3, x_2, x_1] = B$ seyn.

Man sieht nun, wenn man diese Formen mit einander vergleicht, daß durch Vertauschung zweier der Elemente $x_1, x_2, x_3$, der Ausdruck A in B und B in A sich verwandelt.

Da aber die Größen $x_1, x_2, x_3$ nur beispielsweise angenommen worden sind, und das hier Gesagte auch von allen übrigen Zernen der in dem gegebenen Ausdrucke vorhandenen n Größen gilt, so kann die Form A durch Verwechslung jeder zwei ihrer Größen nur in B, und B nur in A übergehen.

Jede denkbare Permutation von n Größen kann durch successives gegenseitiges Vertauschen zweier Größen erzeugt werden, folglich ist der gegebene unsymmetrische Ausdruck, man mag seine Größen wie immer permutiren, nur zweier Formen fähig, d. h. es ist $f = 2$.

Wenn also ein algebraischer Ausdruck durch wechselseitige Vertauschung von n darin erscheinenden Größen mehr als zwei verschiedene Formen anzunehmen vermag, so läßt derselbe wenigstens so viele verschiedene Formen zu, als die größte, n nicht übersteigende, Primzahl Einheiten enthält; so daß, wenn n selbst eine Primzahl ist, die Anzahl dieser verschiedenen Formen wenigstens $= n$ seyn muß.

Den hier vorgetragenen merkwürdigen Satz hat Cauchy gefunden, und in dem Journal de l'école royale polytechnique, 17me Cahier, bewiesen. Ob schon der dortige Beweis dem unsrigen zur Grundlage diente, so gestattet doch der Gesichtspunct, aus welchem wir diesen Beweis auffaßten, eine Erweiterung des Satzes selbst, wie im Folgenden zu ersehen ist.

165.

Es seyen p, q, r von der Einheit und von einander selbst verschiedene Primzahlen, deren Summe die Anzahl n der in einem gegebenen unsymmetrischen Ausdrucke zu permutirenden Größen nicht übersteigt; ferner sey f die Anzahl der verschiedenen Formen, welche dieser Ausdruck zuläßt, so kann f nicht kleiner seyn, als das Product p.q.r.... ꝛc., ohne = 2 zu werden.

Permutirt man nämlich p der n Größen, q andere derselben, r andere u. s. w., jede Gruppe für sich, nach einem beliebigen einfachen Permutationsgesetze, so entsteht aus der anfänglichen Complexion der n Größen eine Periode, welche, da das Product p.q.r.... ꝛc die kleinste durch p, q, r.... ꝛc. zugleich theilbare Zahl ist, p.q.r.... ꝛc. Complexionen enthält (24).

Die Formen, welche der vorgelegte Ausdruck für diese Complexionen darbietet, können, wegen $f < p.q.r....$ ꝛc., nicht sämmtlich von einander verschieden seyn, sondern es müssen darunter wenigstens zwei identische vorkommen. Es seyen in der erwähnten Periode h und $h + d$ die Stellenzahlen der Complexionen, auf welche sich diese identischen Formen beziehen. Hebt man nun die den Stellenzahlen h, $h+d$, $h+2d$, $h+3d$ .... ꝛc. entsprechenden Complexionen aus der Periode heraus, so hat man eine neue Periode, deren Complexionen nothwendig identische Formen des gegebenen Ausdruckes herbeiführen. Die Zahl d ist wenigstens durch eine der Primzahlen p, q, r .... ꝛc., z. B. durch p, nicht theilbar; daher kommen in den Complexionen der neuen Periode wenigstens alle, nach dem angenommenen einfachen Permutationsgesetze vollzogenen, Vertauschungen der bezeichneten p Größen vor, so, daß es nach den im vorigen Beweise angewandten Principien auf die Unveränderlichkeit des gegebenen Ausdruckes, bei jeder gegenseitigen einfachen Vertauschung dieser p Größen,

folglich auch bei jeder Vertauschung dreier dieser Größen, zu schließen erlaubt ist. Da aber diese Folgerung Statt findet, man mag was immer für p Größen aus den vorhandenen n Größen herausheben, oder es mag was immer für eine der andern Zahlen q, r . . . . an die Stelle von p treten; so behält der gegebene Ausdruck gewiß immer dieselbe Form, wenn man was immer für drei seiner Größen untereinander verwechselt. Hieraus folgt aber, gerade so, wie in 163, daß dieser Ausdruck, unter den gemachten Voraussetzungen, nur zweier verschiedener Formen fähig ist.

Da also z. B. $2 + 3 = 5$, und $2 . 3 = 6$ ist, so muß ein algebraischer Ausdruck, welcher durch Verwechslung von fünf seiner Größen mehr als zwei verschiedene Formen erhält, deren wenigstens 6 annehmen. Dasselbe gilt wegen $2 + 3 < 6$, und $2 . 3 = 6$ auch von einem Ausdrucke, in welchem sechs Größen permutirt werden *).

Da ferner $2 + 3 + 5 = 10$, und $2 . 3 . 5 = 30$ ist, so kann ein Ausdruck, in welchem zehn oder mehr Größen permutirt werden, nicht mehr als zwei verschiedene Formen erlangen, ohne wenigstens 30 derselben darzubieten u. s. w.

Anmerkung. Die hier vorgetragenen Sätze lassen sich auch auf den Fall anwenden, wenn die Größen eines Ausdruckes nicht nur allein unter sich, sondern auch noch mit andern, in diesem Ausdrucke nicht erscheinenden, Größen vertauscht werden sollen. Man kann nämlich letztere Größen als Bestandtheile des Ausdruckes betrachten, deren Coefficienten $= 0$ sind.

---

*) Cauchy hat an dem oben angeführten Orte für diesen letztern speciellen Satz einen zwar sinnreichen, aber mühsamen und nur auf die Beschaffenheit der Zahl 6 gegründeten Beweis gegeben.

# Achtes Kapitel.

## Zusammenhang einer besondern Klasse symmetrischer Polynome mit den Combinationen ihrer Grundgrößen.

166.

In dem gegenwärtigen Kapitel beschäftigen wir uns damit, zu zeigen, daß jeder auf mehrere Größen $x_1, x_2, x_3 .. x_n$ sich beziehende einfache symmetrische Ausdruck, welcher aus Gliedern von der Form

$$x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_r^h$$

zusammengesetzt ist, wobei a, b, c . . . h ganze positive oder negative Zahlen anzeigen, durch die Aggregate sämmtlicher Combinationsformen seiner Grundgrößen ohne Wiederholungen ausgedrückt werden kann.

Aus dem in 160 Gesagten ist ersichtlich, daß ein einfacher symmetrischer Ausdruck, dessen Glieder bloß Producte von Potenzen seiner Grundgrößen sind, vollständig dargestellt werden kann, sobald die Grundgrößen, und die Exponenten der erwähnten Potenzen gegeben sind. Hat man es nun mit symmetrischen Ausdrücken dieser Art zu thun, welche sich stets auf einerlei Grundgrößen beziehen, so wird man diese Ausdrücke am einfachsten durch Symbole andeuten, welche bloß aus den Exponenten der Grund-

größen zusammengesetzt sind. Aus diesem Grunde wollen wir einen einfachen symmetrischen Ausdruck, wovon

$$x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_p^h$$

ein Glied ist, durch das Zeichen

$$[a, b, c \ldots h]$$

vorstellen.

Sollte einer der Exponenten z. B. a, a mal wiederholt vorkommen, so wollen wir über denselben, der Kürze wegen, einen sogenannten Wiederholungszeiger schreiben, wodurch sich die Bedeutung des Symbols

$$[\overset{a}{a}, \overset{b}{b}, \overset{c}{c} \ldots \overset{h}{h}]$$

von selbst ergibt.

Die Combinationen der n Elemente $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ohne Wiederholungen zur Klasse k bilden zusammengenommen offenbar einen einfachen symmetrischen Ausdruck, dessen Glieder als Producte der ersten Potenzen der Grundgrößen erscheinen, daher ist der hier erklärten Bezeichnung zufolge:

$$\mathfrak{C}^k(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) = [\overset{k}{1}]$$

167.

Wir wollen zuerst den einfachen symmetrischen Ausdruck

$$x_1^r + x_2^r + x_3^r + \ldots + x_n^r = [r]$$

auf die Combinationsklassen der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ zurückführen, wobei wir vor der Hand p eine ganze positive Zahl seyn lassen.

Bezeichnen wir, wie in 53, die Summe der Combinationen der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ohne Wiederholungen zur Klasse k durch $\mathfrak{C}_k$, und die Summe dieser Combinationen mit Ausschluß jener, in welchen das Element $x_p$ vorkommt, durch $\mathfrak{C}_k^{(x_p)}$, so ist nach 53, 3)

$$x_p \mathfrak{C}_{k-1}^{(x_p)} + \mathfrak{C}_k^{(x_p)} = \mathfrak{C}_k$$

Werden beide Theile dieſer Gleichung mit

$$(-1)^{k-1}\, x_p^{r-k}$$

multiplicirt, und wird beiderſeits die Summe, in Bezug auf den Zeiger k, von 1 bis r genommen, ſo folgt

$$\sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\, x_p^{r-k+1}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_{k-1}} + \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\, x_p^{r-k}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_k} =$$

$$= \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\, x_p^{r-k}\, \mathfrak{C}_k$$

Es iſt aber

$$\sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\, x_p^{r-k+1}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_{k-1}} = x_p^r + \sum_{2,r}^{k} (-1)^{k-1}\, x_p^{r-k+1}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_{k-1}}$$

$$= x_p^r + \sum_{1,r-1}^{k} (-1)^k\, x_p^{r-k}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_k}$$

und

$$\sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\, x_p^{r-k}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_k} = \sum_{1,r-1}^{k} (-1)^{k-1}\, x_p^{r-k}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_k} + (-1)^{r-1}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_r}$$

$$= -\sum_{1,r-1}^{k} (-1)^k\, x_p^{r-k}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_k} + (-1)^{r-1}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_r}$$

folglich

$$x_p^r + (-1)^{r-1}\, \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_r} = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\, x_p^{r-k}\, \mathfrak{C}_k$$

Dieſe Gleichung, in Bezug auf den Zeiger p ſummirt, gibt:

$$\sum_{1,n}^{p} x_p^r + (-1)^{r-1} \sum_{1,n}^{p} \underset{(x_p)}{\mathfrak{C}_r} = \sum_{1,r}^{k} \left[ (-1)^{k-1}\, \mathfrak{C}_k \sum_{1,n}^{p} x_p^{r-k} \right]$$

Aber offenbar iſt

$$\sum_{1,n}^{p} x_p^r = [r]; \quad \sum_{1,n}^{p} x_p^{r-k} = [r-k]$$

$$\sum_{1,n}^{p} \underset{(x_r)}{\mathfrak{C}_r} = (n-r)\, \mathfrak{C}_r \ (53, 2),$$

folglich hat man:

$$[r]+(-1)^{r-1}(n-r)\,\mathfrak{C}_r = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\,\mathfrak{C}_k\,[r-k]$$

d. h.

$$[r] = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\,\mathfrak{C}_k\,[r-k] - (-1)^{r-1}(n-r)\,\mathfrak{C}_r\,;$$

eine Recursionsformel, wobei $(n-r)\,\mathfrak{C}_r = 0$ ist, wenn r die Zahl n erreicht, oder sie übersteigt, weil im ersten Falle der Factor $n-r$, und im zweiten die Größe $\mathfrak{C}_r$ verschwindet.

Es ist offenbar

$$[0] = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \ldots\ldots + x_n^0 = n,$$

daher gibt die gefundene Formel für

$$r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n-1, n, n+1 \ldots\ldots n+t$$

$$[1] = \mathfrak{C}_1\,[0] - (n-1)\,\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1$$

$$[2] = \mathfrak{C}_1\,[1] - \mathfrak{C}_2\,[0] + (n-2)\,\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1\,[1] - 2\,\mathfrak{C}_2$$

$$[3] = \mathfrak{C}_1\,[2] - \mathfrak{C}_2\,[1] + \mathfrak{C}_3\,[0] - (n-3)\,\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_1\,[2] - \mathfrak{C}_2\,[1] + 3\,\mathfrak{C}_3$$

u. s. w.

$$[n-1] = \mathfrak{C}_1\,[n-2] - \mathfrak{C}_2\,[n-3] + \mathfrak{C}_3\,[n-4] - \ldots\ldots \mp \mathfrak{C}_{n-2}\,[1] \pm (n-1)\,\mathfrak{C}_{n-1}$$

$$[n] = \mathfrak{C}_1\,[n-1] - \mathfrak{C}_2\,[n-2] + \mathfrak{C}_3\,[n-3] - \ldots\ldots \mp \mathfrak{C}_{n-1}\,[1] \pm n\,\mathfrak{C}_n$$

$$[n+1] = \mathfrak{C}_1\,[n] - \mathfrak{C}_2\,[n-1] + \mathfrak{C}_3\,[n-2] - \ldots\ldots \mp \mathfrak{C}_{n-1}\,[2] \pm \mathfrak{C}_n\,[1]$$

u. s. w.

$$[n+t] = \mathfrak{C}_1\,[n+t-1] - \mathfrak{C}_2\,[n+t-2] + \mathfrak{C}_3\,[n+t-3] - \ldots\ldots \mp \mathfrak{C}_{n-1}\,[t+1] \pm \mathfrak{C}_n\,[t].$$

Bei den letzten Gliedern dieser Formeln gelten die obern Zeichen, wenn n ungerade, und die untern, wenn n gerade ist.

## 168.

Um eine Recursionsformel für den symmetrischen Aus-

druck $[-r]$ zu erhalten, wobei r, an sich betrachtet, eine positive ganze Zahl vorstellt, bedenke man, daß

$$[-r] = \left(\frac{1}{x_1}\right)^r + \left(\frac{1}{x_2}\right)^r + \left(\frac{1}{x_3}\right)^r + \ldots + \left(\frac{1}{x_n}\right)^r$$

von den Combinationsformen der Größen

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \ldots\ldots \frac{1}{x_n}$$

nach demselben Gesetze abhängt, nach welchem $[+r]$ durch die Combinationen der Größen

$$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$$

bestimmt wird. Nun ist aber, den in 32 angestellten Betrachtungen gemäß, leicht einzusehen, daß wenn man sämmtliche Combinationen von n Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ ohne Wiederholungen zur $(n-r)$ten Klasse durch das Product dieser Größen theilt, alle Combinationen der Größen

$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \ldots\ldots \frac{1}{x_n}$ zur rten Klasse entstehen.

Es ist daher

$$\mathfrak{C}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \ldots\ldots \frac{1}{x_n}\right) = \frac{\mathfrak{C}_{n-r}(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots\ldots x_n}$$

$$= \frac{\mathfrak{C}_{n-r}(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n)}{\mathfrak{C}_n(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n)}$$

$$= \frac{\mathfrak{C}_{n-r}}{\mathfrak{C}_n}$$

wenn man, wie oben, die Elemente $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$, der Kürze wegen, nach den Combinationszeichen wegläßt.

Es ist also verstattet, in der allgemeinen Formel 167 $[-r]$ statt $[r]$, und $[-(r-k)]$ statt $[r-k]$ zu setzen, wenn man zugleich $\frac{\mathfrak{C}_{n-r}}{\mathfrak{C}_n}$ statt $\mathfrak{C}_r$, und $\frac{\mathfrak{C}_{n-k}}{\mathfrak{C}_n}$ statt $\mathfrak{C}_k$ setzt, wodurch man die Gleichung

$$[-r] = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1} \frac{\mathfrak{C}_{n-k}}{\mathfrak{C}_n}[-(r-k)] - (-1)^{r-1}(n-r)\frac{\mathfrak{C}_{n-r}}{\mathfrak{C}_n}$$

erhält. Besondere Fälle davon sind:

$$[-1] = \frac{\mathfrak{C}_{n-1}}{\mathfrak{C}_n}$$

$$[-2] = \frac{\mathfrak{C}_{n-1}[-1] - 2\,\mathfrak{C}_{n-2}}{\mathfrak{C}_n}$$

$$[-3] = \frac{\mathfrak{C}_{n-1}[-2] - \mathfrak{C}_{n-2}[-1] + 3\,\mathfrak{C}_{n-3}}{\mathfrak{C}_n}$$

u. s. w.

169.

Mit Hülfe der oben gefundenen Recursionsformeln für [r] und für [−r] gelangt man leicht zu independenten Ausdrücken für diese symmetrischen Polynome.

Die Gleichung

$$[r] = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\,\mathfrak{C}_k\,[r-k] - (-1)^{r-1}(n-r)\,\mathfrak{C}_r$$

läßt sich durch Multiplication ihres zweiten Theiles mit $-1$, wenn man zugleich, um den vorigen Ausdruck wieder herzustellen, die Zeichen ändert, wegen $\mathfrak{C}_0 = 1$ (35) auf die Form

$$[r] = \frac{(-1)^r (n-r)\,\mathfrak{C}_r - \sum_{1,r}^{k} (-1)^k\,\mathfrak{C}_k\,[r-k]}{\mathfrak{C}_0}$$ bringen.

Vergleicht man diese Gleichung mit der in 104 erhaltenen

$$H_r = \frac{B_r - \sum_{1,r}^{w} A_w\,H_{r-w}}{A_0}$$

welche die zwischen den Coefficienten des Quotienten

$$\frac{\sum_{0,n}^{r} B_r\,x^{l+rt}}{\sum_{0,m}^{r} A_r\,x^{h+rt}} = \sum_{\bullet}^{r} H_r\,x^{l-h+rt}$$

bestehende Recursion angibt, so überzeugt man sich sogleich von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{\overset{r}{\underset{0,n}{\mathfrak{S}}}(-1)^r\,(n-r)\,\mathfrak{C}_r\,x^{l+rt}}{\overset{r}{\underset{0,n}{\mathfrak{S}}}(-1)^r\,\mathfrak{C}_r\,x^{h+rt}} = \overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}[r]\,x^{l-h+rt}$$

Aber hier tritt der in 103 erwähnte Fall ein; es hat nämlich $B_r$ die Form $(\lambda+r\mu)\,A_r$, wenn man $\lambda=n$ und $\mu=-1$ setzt, daher ist, wenn man die in 104 gegebene Formel auf den vorliegenden Fall gehörig anwendet:

$$\frac{\overset{r}{\underset{0,n}{\mathfrak{S}}}(-1)^r\,(n-r)\,\mathfrak{C}_r\,x^{l+rt}}{\overset{r}{\underset{0,n}{\mathfrak{S}}}(-1)^r\,\mathfrak{C}_r\,x^{h+rt}} =$$

$$n\,x^{l-h}+\overset{r}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}\left[r\,x^{l-h+rt}\,\overset{k}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}\frac{1}{k}\,p\mathfrak{C}w^r_k\,(\mathfrak{C}_1,-\mathfrak{C}_2,+\mathfrak{C}_3\ \text{ꝛc.})\right]$$

Dieser Quotient ist aber, wie bereits gesagt wurde, auch

$$=\overset{r}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}[r]\,x^{l-h+rt}=n\,x^{l-h}+\overset{r}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}[r]\,x^{l-h+rt}$$

daher muß

$$[r]=r\,\overset{k}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}\frac{1}{k}\,p\mathfrak{C}w^r_k\,(\mathfrak{C}_1,-\mathfrak{C}_2,+\mathfrak{C}_3\ \text{ꝛc.}\ldots)$$

seyn.

Diese Gleichung drückt folgenden Satz aus:

Sind die numerischen Werthe der Combinationsklassen nicht wiederholbarer, und in combinatorischer Beziehung als verschieden zu behandelnder Elemente gegeben, so findet man die Summe aller Potenzen dieser Elemente mit einem ganzen positiven Exponenten r, wenn man alle möglichen Combinationen mit Wiederholungen für die oben genannten, nun wieder als Elemente betrachteten, mit wechselnden Zeichen genommenen Combinationsklassen, zur Summe r bildet, jede einzelne Com-

plexion mit ihrer Permutationszahl und mit dem Summenexponenten multiplicirt, durch ihren Klassenexponenten dividirt, und alle so erhaltenen Resultate addirt.

Da [r] in [−r] übergeht, wenn man überhaupt

$$\mathfrak{C}_k \text{ in } \frac{\mathfrak{C}_{n-k}}{\mathfrak{C}_n} \text{ verwandelt, so hat man:}$$

$$[-r] = r \sum_{1}^{k} \frac{1}{k} \, p\mathfrak{C}w_k^r \left( \frac{\mathfrak{C}_{n-1}}{\mathfrak{C}_n}, -\frac{\mathfrak{C}_{n-2}}{\mathfrak{C}_n}, +\frac{\mathfrak{C}_{n-3}}{\mathfrak{C}_n} \text{ ꝛc.} \right)$$

wobei die hinter dem Combinationszeichen stehenden Elemente der Reihe nach die Zeiger 1, 2, 3 . . . . erhalten.

170.

So wie die Summe gleichnamiger, mit ganzen positiven Exponenten versehener, Potenzen beliebiger Größen aus den Combinationsklassen dieser Größen ohne Wiederholungen berechnet werden kann, so läßt sich auch umgekehrt der numerische Werth jeder dieser Combinationsklassen durch die Summen der Potenzen der genannten Größen angeben, d. h. es läßt sich, wenn man die oben gebrauchten Zeichen beibehält, $\mathfrak{C}_r$ finden, wenn die Größen [1], [2], [3] . . . . [r] bekannt sind.

Die recurrirende Auflösung dieser Aufgabe kann man aus der in 167 gefundenen Gleichung

$$[r] = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1} \mathfrak{C}_k \, [r-k] - (-1)^{r-1} (n-r) \, \mathfrak{C}_r \text{ ableiten.}$$

Diese kann auch so geschrieben werden:

$$[r] = \sum_{1,r-1}^{k} (-1)^{k-1} \mathfrak{C}_k \, [r-k] + (-1)^{r-1} \mathfrak{C}_r \, [o] - (-1)^{r-1} (n-r) \, \mathfrak{C}_r$$

und gibt wegen $(-1)^{r-1} \mathfrak{C}_r \, [o] - (-1)^{r-1} (n-r) \, \mathfrak{C}_r =$

$$= (-1)^{r-1} \mathfrak{C}_r \, (n - n + r) = (-1)^{r-1} \, r \, \mathfrak{C}_r$$

$$(-1)^{r-1} \, r \, \mathfrak{C}_r = -\sum_{1,r-1}^{k} (-1)^{k-1} \mathfrak{C}_k \, [r-k] + [r].$$

Setzt man in dem Aggregate rechter Hand des Gleichheits-

zeichens k ſtatt r — k, was eben ſo viel heißt, als die Glieder desſelben in verkehrter Ordnung aufführen; ſo hat man, wenn man zugleich das Zeichen — vor dem Summenzeichen wegſchafft:

$$(-1)^{r-1}\, r\, \mathfrak{C}_r = \sum_{1,r-1}^{k} (-1)^{r-k}\, \mathfrak{C}_{r-k}\, [k] + [r] =$$

$$= \sum_{1,r}^{k} (-1)^{r-k}\, \mathfrak{C}_{r-k}\, [k].$$

Dividirt man beiderſeits durch $(-1)^{r-1}\, r$, ſo folgt wegen $(-1)^{-k+1} = (-1)^{k-1}$

$$\mathfrak{C}_r = \frac{1}{r} \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1}\, [k]\, \mathfrak{C}_{r-k},$$

welche Gleichung zur recurrirenden Beſtimmung von $\mathfrak{C}_r$ dient.

Um aber einen independenten Ausdruck für $\mathfrak{C}_r$ durch die gegebenen Größen [1], [2], [3] . . . . . ꝛc. zu erhalten, gebe man dieſer Recurſionsformel die Geſtalt

$$\mathfrak{C}_r = \frac{1}{r} \sum_{1,r}^{k} k \cdot \frac{(-1)^{k-1}[k]}{k} \cdot \mathfrak{C}_{r-k},$$

in welcher ſie mit der in 114 gefundenen Gleichung

$$Q_r = \frac{K}{r} \sum_{1,r}^{w} w\, A_w\, Q_{r-w}$$

übereinſtimmt, wenn man

$$K = 1,\ w = k,\ A_k = \frac{(-1)^{k-1}[k]}{k}$$

und $Q_r = \mathfrak{C}_r$ ſetzt.

Es iſt aber (114) für K = 1:

$$Q_r = \sum_{0}^{r} \frac{1}{r!}\, p\mathfrak{C}w_r^r\, (A_0, A_1, A_2 \ldots . A_m)$$

und aus den am angeführten Orte angeſtellten Betrachtungen erhellet, daß wenn $A_0 = 0$ angenommen, oder

$$Q_r = \sum_{0}^{r} \frac{1}{r!}\, p\mathfrak{C}w_r^r\, (A_1, A_2, A_3 \ldots .)$$

gesetzt wird, für $Q_r$ dieselbe Recursionsformel, wie früher, Statt finden muß; daher ist, der schon öfter gebrauchten Schlußweise gemäß:

$$\mathfrak{C}_r = \sum_{0}^{v} \frac{1}{v!} p\mathfrak{C}w_v^r \left(\frac{[1]}{1}, -\frac{[2]}{2}, \frac{[3]}{3}, -\frac{[4]}{4} \text{ ꝛc.}\right)$$

wenn diese Gleichung nur für einen Werth von r, z. B. für $r = 0$ Stich hält. Da hier kein dem Zeiger o gehöriges Element vorhanden ist, so geht nach 72

$$p\mathfrak{C}w_v^r \left(\frac{[1]}{1}, -\frac{[2]}{2}, \frac{[3]}{3} \ldots\ldots\right)$$

für $v = 0$ in die Einheit, sonst aber in Null über; auch ist $0! = 1$ (13), folglich gibt obige Gleichung $\mathfrak{C}_0 = 1$, wie es in der That seyn muß.

Es ist also, wenn man bloß jene Werthe von r berücksichtiget, welche die Einheit übertreffen:

$$\mathfrak{C}_r = \sum_{1}^{v} \frac{1}{v!} p\mathfrak{C}w_v^r \left(\frac{[1]}{1}, -\frac{[2]}{2}, \frac{[3]}{3}, -\frac{[4]}{4} \text{ ꝛc.}\right)$$

ein Resultat, welches Kramp zuerst angegeben hat.

(Hindenburgs Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, erste Samml. Seite 110.)

Folgendes Beispiel mag den Gebrauch der in 169 und hier aufgestellten independenten Formeln erläutern.

Die Summe gewisser Größen ist = 15, die Summe ihrer Amben = 85, die Summe ihrer Ternen = 225, die Summe ihrer Quaternen = 274. Man verlangt die Summe der vierten Potenzen dieser Größen.

Nach 169 ist $[4] = 4 \cdot \sum_{1}^{k} \frac{1}{k} p\mathfrak{C}w_k^4 (15, -85, 225, -274)$

wobei die Elemente 15, — 85, 225, — 274
die Zeiger 1, 2, 3, 4 erhalten.

Es sind nun:

| | |
|---|---|
| 1 1 1 1 die Combinationen | $\frac{1}{4}$ die Quotienten der durch |
| 1 1 2 der Zeiger zur | $\frac{1}{4}$ die Klassenexponenten ge- |
| 1 3 Summe 4 | 1 theilten Permutations- |
| 2 2 | $\frac{1}{2}$ zahlen dieser Combina- |
| 4 | 1 tionen; |

daher ist $4 \overset{k}{\underset{1}{\mathfrak{S}}} \frac{1}{k}\, pCw_k^4\,(15, -85, 225, -274)$ gleich der Summe der Producte

$$\begin{aligned} 15^4 &= 50625 \\ -4 \,.\, 15^2 \,.\, 85 &= -76500 \\ 4 \,.\, 15 \,.\, 225 &= 13500 \\ 2 \,.\, 85^2 &= 14450 \\ -4 \,.\, 274 &= -1096 \end{aligned}$$

d. h. es ist $[4] = 979$.

Es sey ferner die Summe gewisser Größen $= 15$, die Summe ihrer Quadrate $= 55$, die Summe ihrer Würfel $= 225$, die Summe ihrer Biquadrate $= 979$.

Man verlangt die Summe der Quaternen dieser Größen. Der obigen Formel zufolge ist

$$C_4 = \overset{v}{\underset{1}{\mathfrak{S}}} \frac{1}{v!}\, pCw_v^4 \left(15, -\frac{55}{2}, \frac{225}{3}, -\frac{979}{4}\right)$$

wobei die Elemente $15, -\frac{55}{2}, 75, -\frac{979}{4}$

die Zeiger 1, 2, 3, 4 erhalten.

Den oben angeführten Combinationen der Zeiger zur Summe 4 entsprechen hier die Multiplicatoren $\frac{1}{24}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1$; demnach ist $C_4$ gleich der Summe der Producte

$$\frac{15^4}{24} = \frac{16875}{8}$$

$$-\frac{15^2 \,.\, 55}{4} = -\frac{12375}{4}$$

$$15.75 = 1125$$

$$\frac{55^2}{8} = \frac{3025}{8}$$

$$-\frac{979}{4} = -\frac{979}{4}$$

d. h. es ist $C_4 = 274$.

Die Werthe der hier als unbekannt betrachteten Größen sind 1, 2, 3, 4, 5, wodurch man obige Rechnungen controlliren kann.

Handelt es sich nicht bloß um eine einzelne Potenzensumme oder um eine einzelne Combinationsklasse, sondern ist eine Reihe aufeinanderfolgender dieser Größen zu berechnen, so sind die Recursionsformeln vortheilhafter, als die independenten.

171.

Die Aufgabe, einen einfachen, auf beliebige Größen

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$$

sich beziehenden, symmetrischen Ausdruck von der Form

$$[a, b, c, d \ldots g, h]$$

wobei die Exponenten a, b, c, d . . . g, h ganze positive oder negative Zahlen sind, auf die Combinationen dieser Größen ohne Wiederholungen zurückzuführen, ist als aufgelöst zu betrachten, sobald man im Stande ist, den gegebenen Ausdruck durch symmetrische Ausdrücke von der Form [r] darzustellen, deren Werthe mittelst der bereits gefundenen Formeln durch die erwähnten Combinationen angegeben werden können.

Die Reduction des symmetrischen Ausdruckes

$$[a, b, c, d \ldots g, h]$$

auf Ausdrücke von der Form [r] läßt sich sowohl durch ein recurrirendes, als auch durch ein independentes Verfahren bewerkstelligen. Die recurrirende Entwickelung von

$$[a, b, c, d \ldots g, h]$$

besteht darin, daß man diesen Ausdruck auf andere Ausdrücke

von derſelben Form zurückführt, welche ſich aber auf weniger Exponenten beziehen, als der erſtere, und welche mittelſt derſelben Operation wieder in Ausdrücke umgeſetzt werden können, die noch weniger Exponenten enthalten u. ſ. f., bis man endlich bloß ſolche Ausdrücke vor ſich hat, in welchen nur ein Exponent erſcheint.

Wir wollen hier erſtlich die Exponenten a, b, c, d ... g, h als durchaus von einander verſchieden anſehen.

Multiplicirt man den ſymmetriſchen Ausdruck [a, b, c, d ... g] mit dem Ausdrucke [h], ſo muß das Product ebenfalls ein ſymmetriſcher Ausdruck ſeyn. Denn wird keiner der Factoren durch das Permutiren der Grundgrößen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ geändert, ſo hat dieſes Permutiren auch auf das Product keinen Einfluß.

Hebt man nun aus [a, b, c, d ... g] irgend ein Glied, z. B.

$$x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d \ldots x_{r-1}^g$$

heraus, und multiplicirt man daſſelbe mit dem Ausdrucke

$$[h] = x_1^h + x_2^h + x_3^h + x_4^h + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + x_{r-1}^h + x_r^h + \ldots\ldots + x_n^h$$

ſo erhält man das Partialproduct

$$x_1^{a+h} x_2^b x_3^c x_4^d \ldots\ldots x_{r-1}^g + x_1^a x_2^{b+h} x_3^c x_4^d \ldots\ldots x_{r-1}^g$$
$$+ x_1^a x_2^b x_3^{c+h} x_4^d \ldots\ldots x_{r-1}^g + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d \ldots\ldots x_{r-1}^{g+h} + x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d \ldots\ldots x_{r-1}^g x_r^h$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d \ldots\ldots x_{r-1}^g x_n^h$$

Die r erſten Glieder deſſelben gehen, wegen der Verſchiedenheit ihrer Exponenten, durch keine gegenſeitige Vertauſchung der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ wechſelweiſe in einander über; aber das Product [a, b, c, d ... g] [h] muß ſymmetriſch ſeyn; daher muß es die, durch jene Glieder beſtimmten, einfachen ſymmetriſchen Ausdrücke

$$[a+h,b,c,d\ldots g,][a,b+h,c,d\ldots g],[a,b,c+h,d\ldots g]\ldots$$
$$\ldots[a,b,c,d\ldots g+h],\ [a,b,c,d\ldots g,h]$$

als Beſtandtheile enthalten.

Die Glieder des Partialproductes, welches durch die Multiplication irgend eines andern Gliedes des Ausdruckes

$$[a,\ b,\ c,\ d\ldots g]\ \text{mit}\ [h]$$

erzeugt wird, können zu keinen andern, als zu den ſo eben genannten ſymmetriſchen Ausdrücken gehören, denn in jedem Gliede von $[a, b, c, d \ldots g]$ erſcheinen die nämlichen Exponenten, und dieſe gehen mit dem Exponenten h ſtets einerlei Verbindungen ein.

Es beſteht alſo das Product $[a, b, c, d \ldots g]\,[h]$ bloß aus den ſymmetriſchen Ausdrücken

$$[a+h,b,c,d\ldots g],[a,b+h,c,d\ldots g],[a,b,c+h,d\ldots g]\ldots$$
$$\ldots[a,b,c,d\ldots g+h],\ [a,b,c,d\ldots g,\ h]$$

Iſt keiner der zuſammengeſetzten Exponenten

$$a+h,\ b+h,\ c+h,\ d+h\ldots g+h$$

einem der einfachen a, b, c, d . . . . g gleich, ſo entſteht jedes Glied der genannten ſymmetriſchen Ausdrücke bei der Multiplication von $[a, b, c, d \ldots g]$ mit $[h]$ bloß einmal, weil es unter dieſer Vorausſetzung nur auf eine Art in zwei Factoren zerlegt werden kann, deren einer zu $[a, b, c, d \ldots g]$ und der andere zu $[h]$ gehört; daher iſt

$$[a,b,c,d\ldots g]\,[h] = [a+h,b,c,d\ldots g]+[a,b+h,c,d\ldots g]$$
$$+[a,b,c+h,d\ldots g]+\ldots$$
$$\ldots+[a,b,c,d\ldots g+h]+[a,b,c,d\ldots g,\ h]$$

Hieraus folgt

$$[a,b,c,d\ldots g,h] = [a,b,c,d\ldots g]\,[h]-[a+h,b,c,d\ldots g]$$
$$-[a,b+h,c,d\ldots g]$$
$$-[a,b,c+h,d\ldots g]$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$-[a,b,c,d\ldots g+h]$$

durch welche Gleichung der symmetrische Ausdruck

$$[a, b, c, d \ldots g, h]$$

auf solche symmetrische Ausdrücke, die um einen Exponenten weniger enthalten, zurückgeführt wird.

Insbesondere ist

$$[a,b] = [a][b] - [a+b]$$
$$[a,b,c] = [a,b][c] - [a+c,b] - [a,b+c]$$
$$[a,b,c,d] = [a,b,c][d] - [a+d,b,c] - [a,b+d,c] - [a,b,c+d]$$

u. s. w.

Ist aber einer der zusammengesetzten Exponenten, einem der einfachen gleich, z. B. $a+h=b$, so kommt jedes Glied des symmetrischen Ausdruckes $[a+h, b, c, d \ldots g]$ im Producte $[a, b, c, d \ldots g]\,[h]$ zweimal vor; denn jedes dieser Glieder

wie z. B. $x_1^{a+h} x_2^b x_3^c \ldots x_{r-1}^g = x_1^b x_2^b x_3^c \ldots x_r^g$

entsteht sowohl durch die Multiplication des Gliedes

$$x_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_{r-1}^g \text{ mit } x_1^h,$$

als auch durch die Multiplication des Gliedes

$$x_1^b x_2^a x_3^c \ldots x_{r-1}^g \text{ mit } x_2^h.$$

Man hat also in diesem Falle:

$$[a,b,c,d \ldots g,h] = [a,b,c,d \ldots g][h] - 2[b,c,d \ldots g] - [a,b+h,c,d \ldots g] - [a,b,c+h,d \ldots g] - \ldots\ldots\ldots - [a,b,c,d \ldots g+h]$$

172.

Sind die Exponenten der in einem jeden Gliede eines einfachen symmetrischen Ausdruckes mit einander multiplicirten Potenzen nicht sämmtlich von einander verschieden, d. h. hat dieser Ausdruck die Form

$$[a, b, c, d \ldots . g, h]$$

wobei die Exponenten a, b, c, d . . . . g, h als verſchieden angenommen werden, und die denſelben überſchriebenen Zahlen a, b, c, d . . . . g, h die Wiederholungen derſelben andeuten, ſo kann man den vorgelegten Ausdruck mittelſt anderer ſymmetriſcher Ausdrücke darſtellen, in welchen einer der Exponenten a, b, c, d . . . . g, h um einmal weniger wiederholt iſt.

Multiplicirt man nämlich den ſymmetriſchen Ausdruck

$$[a, b, c, d \ldots . g, h-1] \text{ mit } [h]$$

und betrachtet man das dabei entſtehende Partialproduct eines ſeiner Theile, z. B.

$$x_1^a\ x_2^a\ x_3^a \ldots . x_a^a\ x_{a+1}^b\ x_{a+2}^b\ x_{a+3}^b \ldots . x_{a+b}^b\ x_{a+b+1}^e \ldots .$$

$$\ldots . x_{v-h+1}^h \ldots . x_{v-1}^h$$

wobei, der Kürze wegen,

$$a + b + c + d + \ldots . + g + h = v$$

geſetzt worden iſt, mit dem Multiplicator

$$[h] = x_1^h + x_2^h + x_3^h + \ldots . \text{ ꝛc.}$$

ſo findet man, daß die Glieder dieſes Partialproductes zu den einfachen ſymmetriſchen Ausdrücken:

$$[a + h, a-1, b, c \ldots . g, h-1]$$
$$[a, b + h, b-1, c \ldots . g, h-1]$$
$$[a, b, c + h, c-1 \ldots . g, h-1]$$
$$\ldots . \ldots . \ldots . \ldots . \ldots .$$
$$[a, b, c \ldots . g + h, g-1, h-1]$$
$$[a, b, c \ldots . g, 2h, h-2]$$
$$[a, b, c \ldots . g, h]$$

gehören, und daß bei der Multiplication anderer Theile von

$$[a, b, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b\ c\ \ g\ h-1} \text{ mit } [h]$$

keine Glieder entstehen, die nicht in den angeführten symmetrischen Ausdrücken enthalten sind. Jedes Glied des zuletzt genannten Ausdruckes

$$[a, b, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b\ c\ \ g\ h}$$

erscheint im Producte

$$[a, b, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b\ c\ \ g\ h-1} [h]$$

h mal; denn jede der in diesem Gliede mit dem Exponenten h versehenen h Größen ist in [h] vorhanden, und wird mit dem als Factor eines Bestandtheiles von

$$[a, b, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b\ c\ \ g\ h-1}$$

vorkommenden Producte der übrigen h — 1 Größen multiplicirt: hingegen wird jedes Glied der übrigen symmetrischen Ausdrücke bei der Multiplication von

$$[a, b, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b\ c\ \ g\ h-1} \text{ mit } [h]$$

nur einmal erzeugt: Es ist also das Product

$$[a, b, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b\ c\ \ g\ h-1} [h]$$

der Summe der oben angeführten symmetrischen Ausdrücke gleich, wenn dem letzten derselben der Coefficient h beigelegt wird, wodurch sich folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
h\,[a, b, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b\ c\ \ g\ h} &= [a, b, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b\ c\ \ g\ h-1}\,[h] \\
&- [a + h, a, b, c \ldots\ldots g, h]^{a-1\ b\ c\ \ g\ h-1} \\
&- [a, b + h, b, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b-1\ c\ \ g\ h-1} \\
&- [a, b, c + h, c \ldots\ldots g, h]^{a\ b\ c-1\ \ g\ h-1} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- [a, b, c \ldots\ldots g + h, g, h]^{a\ b\ c\ \ g-1\ h-1} \\
&= [a, b, c \ldots\ldots g, 2h, h]^{a\ b\ c\ \ g\ h-1}
\end{aligned}$$

Wegen des besondern Falles, wenn $a + h = b$ ist, gilt hier ebenfalls das, was hierüber in 171 bemerkt wurde.

Aus dieser Gleichung kann die in 171 entwickelte sogleich abgeleitet werden, wenn man die Wiederholungsexponenten $a = b = c = \ldots = g = h = 1$ annimmt, und bedenkt, daß ein Exponent, der den Wiederholungszeiger 0 erhält, gar nicht zu setzen ist; ferner ein symmetrischer Ausdruck, welcher sich auf einen mit dem Wiederholungszeiger — 1 versehenen Exponenten bezieht, gar nicht entstehen kann, und daher weggelassen werden muß.

Man kann aber auch umgekehrt die hier gefundene Gleichung aus der in 171 gegebenen ableiten, wie im Folgenden zu ersehen ist.

173.

Setzt man in dem symmetrischen Ausdrucke [a,b,c,d ... g,h], dessen Exponenten in 171 als durchgehends von einander verschiedene Zahlen betrachtet worden sind, eine gewisse Anzahl a derselben = a, so werden alle Glieder dieses Ausdruckes einander gleich, in welchen die erwähnten a Exponenten über der nämlichen Complexion der Grundgrößen, aber in einer andern Ordnung, stehen. Solcher Glieder gibt es so viele, als Permutationen für a Exponenten möglich sind, d. h. die Anzahl derselben ist = a!; es geht daher der symmetrische Ausdruck

$$[a, b, c, d \ldots . g, h] \text{ in } a! \overset{a}{[a}, b, c, d \ldots . g, h]$$

über, wobei das Symbol $\overset{a}{[a}, b, c, d \ldots . g, h]$ offenbar nur die verschiedenen Glieder des genannten symmetrischen Ausdruckes umfaßt.

Setzt man überdieß noch b andere Exponenten = b, so zerfällt der symmetrische Ausdruck in neue Gruppen, deren jede b! gleiche Glieder enthält, und es wird

$$[a, b, c, d \ldots . g, h] = a!\, b! \overset{a\ \ b}{[a}, b, c \ldots . g, h]$$

u. s. w.

Wendet man das hier Gesagte auf die Gleichung in 171 an, indem man die Exponenten a, b, c .... g, h, der Reihe nach, a mal, b mal, c mal, .... g mal, h mal wiederholt annimmt, so erhält man

statt [a, b, c .... g, h]

den Ausdruck $a!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,h!\,[\overset{a}{a},\overset{b}{b},\overset{c}{c}\ldots\ldots\overset{g}{g},\overset{h}{h}]$

und statt [a, b, c .... g]

den Ausdruck $a!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,(h-1)!\,[\overset{a}{a},\overset{b}{b},\overset{c}{c}\ldots\overset{g}{g},\overset{h-1}{h}]$

Der Ausdruck, welcher den Exponenten a + h enthält, kommt so oft vor, als es Exponenten gibt, die = a sind; die Vereinigung aller dieser Ausdrücke gibt den Ausdruck

$$a(a-1)!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,(h-1)!\,[\overset{a-1}{a+h},\overset{b}{a},\overset{c}{b},\ldots\overset{g}{g},\overset{h-1}{h}] =$$

$$= a!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,(h-1)!\,[\overset{a-1}{a+h},\overset{b}{a},\overset{c}{b},\ldots\overset{g}{g},\overset{h-1}{h}]$$

Eben so geben alle Ausdrücke, in welchen der Exponent b + h erscheint, zusammengenommen den Ausdruck

$$a!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,(h-1)!\,[\overset{a}{a},\overset{b-1}{b+h},\overset{c}{b},\ldots\overset{g}{g},\overset{h-1}{h}];$$

ferner alle Ausdrücke, in welchen der Exponent c + h vorkommt, zusammengenommen den Ausdruck

$$a!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,(h-1)!\,[\overset{a}{a},\overset{b}{b},\overset{c-1}{c+h},\overset{c}{b},\ldots\overset{g}{g},\overset{h-1}{h}]$$

u. s. w.

Endlich kommt man noch auf Ausdrücke, in welchen sich der Exponent h + h = 2 h befindet, und ihre Summe geht in

$$a!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,(h-2)!\,(h-1)\,[\overset{a}{a},\overset{b}{b},\overset{c}{c}\ldots\overset{g}{g},2h,\overset{h-2}{h}] =$$

$$= a!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,(h-1)!\,[\overset{a}{a},\overset{b}{b},\overset{c}{c}\ldots\overset{g}{g},2h,\overset{h-2}{h}] \text{ über.}$$

Man hat daher statt der Gleichung in 171 folgende zu setzen:

$$a!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,\mathfrak{h}!\,[\overset{a}{a},\overset{b}{b},\overset{c}{c}\,\ldots\,\overset{g}{g},\overset{\mathfrak{h}}{h}] =$$

$$= a!\,b!\,c!\,\ldots\,g!\,(\mathfrak{h}-1)!\,\Big([\overset{a}{a},\overset{b}{b},\overset{c}{c}\,\ldots\,\overset{g}{g},\overset{\mathfrak{h}-1}{h}]\,[h]$$

$$-[a+h,\overset{a-1}{a},\overset{b}{b},\overset{c}{c}\,\ldots\,\overset{g}{g},\overset{\mathfrak{h}-1}{h}]$$

$$-[\overset{a}{a},\overset{b-1}{b+h},\overset{c}{b},\overset{c}{c}\,\ldots\,\overset{g}{g},\overset{\mathfrak{h}-1}{h}]$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$-[\overset{a}{a},\overset{b}{b},\overset{c}{c}\,\ldots\,\overset{\mathfrak{h}-1}{2h},h]\Big)$$

welche nach verrichteter Division durch den beiden Theilen anklebenden Factor $a!\,b!\,c\,\ldots\,g!\,(\mathfrak{h}-1)!$ mit der in 172 gefundenen Gleichung übereinstimmt.

174.

Die in 171 aufgestellte Recursionsformel enthält folgende Regel zur Ableitung des symmetrischen Ausdruckes

$$[a, b, c, d\,\ldots\,g, h],$$

wobei die Exponenten $a, b, c\,\ldots\,g, h$ ungleiche Zahlen sind, aus dem Ausdrucke $[a, b, c, d\,\ldots\,g]$.

Man multiplicire erstlich $[a, b, c, d\,\ldots\,g]$ mit $[h]$; dann setze man in $[a, b, c, d\,\ldots\,g]$ abwechselnd $a+h$ statt $a$, $b+h$ statt $b$, $c+h$ statt $c$, u. s. w. endlich $g+h$ statt $g$ und ziehe alle so erhaltenen Resultate von dem Producte

$$[a, b, c, d\,\ldots\,g]\,[h]$$

ab, so hat man $[a, b, c, d\,\ldots\,g, h]$.

Auf diese Art findet man aus $[a]$

$$[a, b] = [a]\,[b] - [a+b]$$

ferner hieraus

$$[a, b, c] = [a]\,[b]\,[c] - [a+b]\,[c]$$
$$- ([a+c]\,[b] - [a+b+c])$$
$$- ([a]\,[b+c] - [a+b+c])$$
$$= [a]\,[b]\,[c] - [a+b]\,[c] + 2\,[a+b+c]$$
$$- [a+c]\,[b]$$
$$- [b+c]\,[a]$$

und aus dieſem Ausdrucke, nach gehöriger Reduction:

$$[a, b, c, d] = [a][b][c][d] - [a+b][c][d] - [a+c][b][d] - [b+c][a][d] - [a+d][b][c] - [b+d][a][c] - [c+d][a][b]$$
$$+ 2[a+b+c][d] + [a+b][c+d]$$
$$+ 2[a+b+d][c] + [a+c][b+d]$$
$$+ 2[a+c+d][b] + [b+c][a+d]$$
$$+ 2[b+c+d][a]$$
$$- 2 . 3[a+b+c+d]$$

u. ſ. w.

Denkt man ſich dieſe Rechnung ſo lange fortgeſetzt, bis man endlich auf die Entwickelung von [a, b, c, d . . . g, h] kommt, ſo wird man ein, bloß aus Gliedern von der Form

$$[p][q][r][s] \ldots .$$

beſtehendes, Polynom vor ſich haben, wobei die Größen p, q, r, s ... aus den Exponenten a, b, c, d . . . g, h durch Addition zuſammengeſetzt ſind, ſo zwar, daß jede dieſer Größen andere Exponenten in Anſpruch nimmt, in ſämmtlichen Größen aber alle Exponenten erſcheinen. Es wird nämlich bei jedem einzelnen Schritte, wodurch dem ſymmetriſchen Ausdrucke ein Exponent zuwächſt, dieſer in alle Glieder der bereits vorhandenen Entwickelung, entweder durch Multiplication oder durch Addition, aber an jedem Orte nur einmal, eingeführt.

Sieht man auf die einzelnen Glieder der Entwickelung von [a, b, c, d . . . . g, h] ohne ihre Vorzeichen und ihre Coefficienten zu berückſichtigen, ſo ſtellen ſie alle möglichen verſchiedenen Arten dar, auf welche man die Exponenten

$$a, b, c, d \ldots g, h$$

deren Anzahl = m ſeyn mag, in 1, 2, 3 . . . m — 1, m

Klammern zu vertheilen im Stande ist. Denn besteht diese Anordnung der Exponenten in der Entwickelung von

[a, b, c, d . . . g, h]

nicht, weil da eine bestimmte Art der Vertheilung der Exponenten in die Klammern nicht realisirt ist, so fehlt auch die nach Absonderung des Exponenten h zurückbleibende Gruppe der Exponenten in der Entwickelung von [a, b, c, d . . . g]. Dieser Schluß erstreckt sich, wie man leicht sieht, bis auf die Entwickelung von [a,b], welcher aber, in der hier besprochenen Beziehung, durchaus kein Mangel nachgewiesen werden kann.

Was die Vorzeichen der Glieder in der Entwickelung von [a, b, c, d . . . g, h] betrifft, so stimmen dieselben mit den Zeichen der Glieder in der Entwickelung von [a, b, c, d . . . g], aus welchen erstere Glieder entstanden sind, überein, wenn jene [h] als Factor enthalten; erscheint aber h als Bestandtheil eines zusammengesetzten Exponenten, so erhalten die neuerzeugten Glieder das entgegengesetzte Zeichen. Dieß ist eine natürliche Folge des durch die oben angeführte Recursionsformel bedingten Ganges der Rechnung. Ueberblickt man nun die ganze Bildungs-Periode eines Gliedes, bei dem stufenweisen Uebergange von [a] und [a, b] auf [a, b, c, d . . . g] und [a, b, c, d . . . g, h], so findet man, daß man für jeden Factor desselben von der Form [p], dessen Exponent p aus einer geraden Anzahl der Exponenten a, b, c, d . . . zusammengesetzt ist, das Zeichen — zu rechnen habe, so daß das Glied selbst positiv oder negativ seyn wird, je nachdem es eine gerade oder eine ungerade Anzahl solcher Factoren in sich begreift.

Ein Glied endlich, in dessen Factor [p] der Exponent h sich als Bestandtheil zeigt, entsteht bei dem Uebergange von

[a, b, c, d . . . g] auf [a, b, c, d . . . g, h]

so oft, als die Anzahl der Exponenten, welche mit h durch Addition verknüpft sind, Einheiten enthält; denn jeder dieser Exponenten wurde für sich einmal um h vermehrt. Besteht also

p aus einer Menge w der Exponenten a, b, c, d . . . g, h, so erhält das Glied, worin sich [p] als Factor befindet, bei dem bloßen Uebergange von [a, b, c, d . . . . . g] auf [a, b, c, d . . . g, h] den Coefficienten (w—1). Erwägt man daher den ganzen Gang der Erzeugung dieses Gliedes, so erhellet, daß man demselben für jeden mit einem w gliedrigen Exponenten versehenen Factor [p] den Coefficienten $1 . 2 . 3 \ldots (w-1) = (w-1)!$ beizulegen habe, so daß der gesammte Coefficient dieses Gliedes, das Product dieser partiellen Coefficienten seyn muß.

So kommt z. B. in der Entwickelung des symmetrischen Ausdruckes [a, b, c, d, e, f, g, h] ein Glied vor, welchem das Product

$$[a + b + c]\,[d + e + f]\,[g + h]$$

zum Grunde liegt. Dieses Glied erhält das Vorzeichen —, weil sich darin ein Factor mit einem zweistelligen Exponenten befindet. Der Coefficient desselben ist $= 1 . 2 . 1 . 2 . 1 = 4$, also das Glied selbst

$$-4\,[a + b + c]\,[d + e + f]\,[g + h].$$

Man sieht zugleich, daß alle Glieder der Entwickelung eines symmetrischen Ausdruckes [a, b, c, d, e . . . . ], welche eine gleiche Anzahl Factoren von der Form [p] enthalten, und deren Exponenten auf dieselbe Art aus a, b, c, d, e . . . . . zusammengesetzt sind, sowohl in den Zeichen, als auch in den Coefficienten übereinstimmen; so daß der independenten Darstellung eines symmetrischen Ausdruckes [a, b, c, d, e . . . . . ], dessen Exponenten sämmtlich von einander verschieden sind, durch symmetrische Ausdrücke mit einem einzigen Exponenten, gar keine Schwierigkeit im Wege steht, sobald man die verschiedenen Formen der Glieder desselben vollständig aufzuführen weiß.

Da, wie wir oben bemerkt haben, alle diese Glieder zusammengenommen das System aller verschiedenen Arten ersicht-

lich machen, auf welche die Exponenten a, b, c, d . . . . , zugleich in 1, 2, 3, 4, 5 . . . . . Fächer vertheilt werden können, so läßt sich zur Erzeugung derselben ein combinatorisches Verfahren leicht angeben. Am einfachsten bleibt aber immer die recurrirende Bildung der diesen Gliedern entsprechenden Exponentengruppen, welche nach Meier Hirsch unter der Form einer Involution dargestellt, einer independenten Bildungsweise völlig gleichkommt, und überhaupt in Bezug auf die Einfachheit und Leichtigkeit der Operation selbst, nichts mehr zu wünschen übrig läßt.

Folgendes Schema legt die Exponentengruppen aller Glieder der Entwickelung von [a, b, c, d . . . .] für 1, 2, 3, 4 . . . . Exponenten klar vor Augen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | d | c | b | a |
| | d | c | b+a | |
| | d | c+b, | a | |
| | d | c+a, | b | |
| | d | c+b+a | | |
| | d+c, | b, | a | |
| 2c. | d+b, | c, | a | |
| | d+a, | c, | b | |
| | d+c, | b+a | | |
| | d+b+a, | c | | |
| | d+c+b, | a | | |
| | d+a, | c+b | | |
| | d+c+a, | b | | |
| | d+b, | c+a | | |
| | d+c+b+a | | | |

2c.

Man setzt dasselbe leicht fort, wenn man jeden neu eintretenden Exponenten erstlich allen bereits vorhandenen Exponentengruppen vorsetzt, und ihn dann zu jedem abgesonderten einfachen oder zusammengesetzten Exponenten addirt.

## 175.

Die Entwickelung des symmetrischen Ausdruckes

$$[a, b, c, d \ldots\ldots]$$

worin die Exponenten a, b, c, d .... ungleich sind, läßt sich in die Entwickelung des symmetrischen Ausdruckes

$$[\overset{a}{a}, \overset{b}{b}, \overset{c}{c}, \overset{d}{d} \ldots\ldots \overset{h}{h}]$$

umsetzen, wenn man eine Menge a der Exponenten des erstern $= a$, eine Menge b derselben $= b$ annimmt u. s. w.

Dabei verwandelt sich jedoch $[a, b, c, d \ldots.]$ in

$$a!\, b!\, c!\, b! \ldots. h!\, [\overset{a}{a}, \overset{b}{b}, c, \overset{d}{d} \ldots. \overset{h}{h}],$$

folglich hat man, um $[\overset{a}{a}, \overset{b}{b}, \overset{c}{c}, \overset{d}{d} \ldots. \overset{h}{h}]$ einfach zu erhalten, alle Glieder der erstern Entwickelung durch

$$a!\, b!\, c!\, b! \ldots.$$

welches Product wir der Kürze wegen A nennen wollen, zu theilen.

Ueberdieß werden, wegen der Gleichheit der Exponenten, mehrere Glieder der erwähnten Entwickelung selbst einander gleich, und zwar, wenn nach der gehörigen Zusammenziehung der gleichen Exponenten die von demselben abhängende Größe

$$[\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \ldots] [\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \ldots] \times$$
$$\times [\alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \ldots] \ldots.$$

in einem Gliede vorkommt, so viele, als es verschiedene Arten gibt, a Exponenten, deren jeder $= a$ ist, ferner b Exponenten, deren jeder $= b$ ist, c Exponenten, deren jeder $= c$ ist u. s. w., in die zwischen den Klammern in der angeführten Größe befindlichen Räume oder Fächer so zu vertheilen, daß in das

| erste | zweite | dritte | ... Fach | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | ... | » | Exponenten | der | erſten | Art |
| $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | ... | » | » | » | » | der zweiten » |
| $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ | ... | » | » | » | » | der dritten » |

u. s. w. kommen, wobei

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = a$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots = b$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots = c$$

ist, u. s. w.

Für die Anzahl dieser Vertheilungsarten findet man, nach 38, den Ausdruck

$$\frac{a!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\,\text{ꝛc.}} \cdot \frac{b!}{\beta_1!\beta_2!\beta_3!\,\text{ꝛc.}} \cdot \frac{c!}{\gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!\,\text{ꝛc.}}\ \text{ꝛc.}$$

welchen wir hier durch B andeuten werden. Es erhält also obige Größe den Coefficienten B.

Da endlich die angeführte Größe, wenn man

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \ldots = \lambda_1$$
$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \ldots = \lambda_2$$
$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 + \ldots = \lambda_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

setzt, nach der in 174 auseinandergesetzten ursprünglichen Entwickelung bereits mit dem Coefficienten

$$(\lambda_1-1)!\ (\lambda_2-1)!\ (\lambda_3-1)!\ \text{ꝛc.} = C$$

versehen ist, so ist der Coefficient des Gliedes, worin die Größe

$$[\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c+\ldots]\ [\alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c+\ldots] \times$$
$$\times\ [\alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c+\ldots]\ \text{ꝛc.}$$

erscheint, $= \frac{BC}{A}$

d. i. $$= \frac{(\lambda_1-1)!\ (\lambda_2-1)!\ (\lambda_3-1)!\ \text{ꝛc.}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\,\text{ꝛc.}\,\beta_1!\beta_2!\beta_3!\,\text{ꝛc.}\,\gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!\,\text{ꝛc.}}$$

Sollten aber einige Factoren der Größe

$$[\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c+\ldots]\ [\alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c+\ldots] \times$$
$$\times\ [\alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c+\ldots]\ \text{ꝛc.}$$

einander gleich seyn, d. h. sollte diese Größe die Form

$$[\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c+\ldots]^r\ [\alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c+\ldots]^s \times$$
$$\times\ [\alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c+\ldots]^t\ \text{ꝛc.}$$

haben, so muß der diesem Falle angepaßte Coefficient, nämlich

$$\frac{[(\lambda_1-1)!]^r\,[(\lambda_2-1)!]^s\,[(\lambda_3-1)!]^t\ \text{ꝛc.}}{(\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\ \text{ꝛc.})^r\,(\beta_1!\beta_2!\beta_3!\ \text{ꝛc.})^s\,(\gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!\ \text{ꝛc.})^t\ \text{ꝛc.}}$$

noch durch das Product

$$r!\ s!\ t!\ \text{ꝛc.}$$

getheilt werden, weil hier r Fächer vorhanden sind, deren Exponenten, im Sinne der oben gebrauchten Schlußweise, aus einem Fache in das andere gleichzeitig übertragen werden können, ohne daß hiedurch eine neue Vertheilungsart Statt findet.

Die verschiedenen Formen der Glieder der Entwickelung

$$a,\ b,\ c,\ d\ \ldots\ .$$

werden mit Hülfe der in 174 angegebenen Involution abgeleitet, wobei man jedoch alle Wiederholungen bereits angeführter Formen zu beseitigen hat.

Um sich in den Gang der hier ausgeführten Reductionen eine klare Einsicht zu verschaffen, setze man in der Entwickelung eines Ausdruckes mit ungleichen Exponenten, z. B. des Ausdruckes [a, b, c, d, e] zwei oder drei Exponenten einander gleich, und betrachte die Glieder, welche dadurch eine übereinstimmende Form erlangen, also in eines zusammengezogen werden können.

## 176.

Obschon mittelst der im Vorigen gegebenen Formeln jeder einfache symmetrische Ausdruck, in welchem bloß ganze positive oder negative Exponenten erscheinen, durch die Combinationsklassen der ihm zum Grunde liegenden Größen ohne Wiederholungen dargestellt werden kann, so läßt sich doch dieses Problem in besondern Fällen mit Hülfe specieller Kunstgriffe auf eine leichtere Art lösen, als dieß durch den Gebrauch der allgemeinen Formeln möglich wäre.

Um hievon ein Beispiel beizubringen, betrachten wir den symmetrischen Ausdruck $[a^r]$, welcher entsteht, wenn man die

Quadrate der Grundgrößen zur rten Klasse ohne Wiederholungen combinirt. Dieser Ausdruck wird auf die Combinationsklassen der einfachen Grundgrößen reducirt, wenn man die Form des Productes zweier Combinationsklassen dieser Größen untersucht.

Es sey $x_a x_b x_c \ldots x_h$ eine Combination der Grundgrößen $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ zur Klasse p, und $x_a x_b x_c \ldots x_h$ eine Combination derselben Größen zur Klasse q; ferner seyen w Elemente der ersten Combination eben so vielen Elementen der zweiten stückweise gleich, so enthält das Product beider Combinationen w Quadrate und $p+q-2w$ erste Potenzen der Grundgrößen zu Factoren, und gehört folglich zu dem einfachen symmetrischen Ausdrucke

$$[2^{w}, 1^{p+q-2w}]$$

Sieht man auf die Elemente der beiden Combinationen $x_a x_b x_c \ldots x_h$, $x_a x_b x_c \ldots x_h$, welche unter den w gleichen Elementen nicht begriffen sind, und wovon $p-w$ in der ersten, und $q-w$ in der zweiten Combination vorkommen, so findet man, daß das Product beider Combinationen nicht geändert wird, wenn man eine gewisse Anzahl dieser Elemente in der ersten Complexion mit einer gleichen Anzahl eben solcher Elemente in der zweiten Complexion verwechselt, woraus sich ergibt, daß das oben erhaltene Product auf so viele verschiedene Arten erzeugt werden kann, als sich $p+q-2w$ Elemente zur $(p-w)$ten, oder auch zur $(q-w)$ten Klasse combiniren lassen, d. h. auf $\binom{p+q-2w}{p-w} = \binom{p+q-2w}{q-w}$ Arten.

Bezeichnet man die gesammte pte Combinationsklasse der Grundgrößen $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ durch $C_p$, und eben so die qte Combinationsklasse derselben Größen durch $C_q$, so ist das Product $C_p C_q$ offenbar ein symmetrischer Ausdruck, und da alle Combinationen, von welchen oben die Rede war, da-

bei als Factoren zusammentreten, so enthält dieses Product den symmetrischen Ausdruck

$$[2, 1]^{w\ p+q-2w} \text{ in Allem } \binom{p+q-2w}{p-w} \text{ mal.}$$

Aber hier kann man der Zahl w alle ganzen positiven Werthe, von o angefangen, beilegen, welche die kleinere der Zahlen p, q nicht übersteigen, folglich ist

$$\mathfrak{C}_p \mathfrak{C}_q = \sum_{o}^{w} \binom{p+q-2w}{p-w} [2, 1]^{w\ p+q-2w}$$

Es sey nun $p = 2r - q$, so hat man, wenn man beiderseits mit $(-1)^q$ multiplicirt, und dann in Bezug auf den Zeiger q summirt:

$$\sum_{o,2r}^{q} (-1)^q \mathfrak{C}_q \mathfrak{C}_{2r-q} = \sum_{o}^{w} \left[ [2, 1]^{w\ 2r-2w} \sum_{w,2r-w}^{q} (-1)^q \binom{2r-2w}{2r-w-q} \right]$$

Aber es ist nach 57, 2) und nach 93

$$\sum_{w,2r-w}^{q} (-1)^q \binom{2r-2w}{2r-w-q} = \sum_{o,2r-2w}^{q} (-1)^{q+w} \binom{2r-2w}{2r-2w-q}$$

$$= (-1)^w \binom{2r-2w-1}{2r-2w}$$

ein Ausdruck, welcher verschwindet, sobald $w < r$ ist, und für $w = r$ in die Einheit übergeht. Man hat also

$$\sum_{o,2r}^{q} (-1)^q \mathfrak{C}_q \mathfrak{C}_{2r-q} = (-1)^r [2, 1]^{r\ o} = (-1)^r [2]^r$$

oder, wenn man in dem Aggregate

$$\sum_{o,2r}^{q} (-1)^q \mathfrak{C}_q \mathfrak{C}_{2r-q}$$

die vom Anfange und vom Ende desselben gleichweit entfernten Glieder zusammen nimmt, und das dem Zeiger $q = r$ entsprechende Mittelglied davon absondert:

$$2 \sum_{o,r-1}^{q} (-1)^q \mathfrak{C}_q \mathfrak{C}_{2r-q} + (-1)^r \mathfrak{C}_r^2 = (-1)^r [2]^r$$

folglich $[2]^{r} = \mathfrak{C}_r^2 + 2 \sum_{0,r-1}^{q} (-1)^{q-r} \mathfrak{C}_q \mathfrak{C}_{2r-q}$,

oder wenn man $r-q$ ſtatt $q$ ſchreibt:

$$[2] = \mathfrak{C}^2 + 2 \sum_{0,r-1}^{q} (-1)^q \mathfrak{C}_{r-q} \mathfrak{C}_{r+q}$$

eine Formel, welche von Euler herrührt.

## Sinnstörende Druckfehler.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 10 | Zeile | 7 | v. | unten | statt | bekommen | l. | vorkommen |
| » | 84 | » | 9 | » | » | » | $A_0 A_1$ | » | $A_0 + A_1$ |
| » | 102 | » | 5 | » | » | » | $A_4^d$ | » | $A_8^d$ |
| » | 168 | » | 5 | » | » | » | $a_n$ | » | $a^n$ |
| » | 190 | » | 7 | » | » | » | $\mathfrak{c} = \lambda$ | » | $\mathfrak{c} + k = \lambda$ |
| » | 240 | » | 10 | » | » | » | $v + 12$ | » | $2v + 1$ |
| » | 264 | » | 10 | » | » | » | $(n^2 - 1(n^2 - 3^2)$ | l. | $(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)$ |

folglich $[2]^r = \mathfrak{C}_r^2 + 2$

oder wenn man $r - q$ ſtatt $q$

$$[2] = \mathfrak{C}^2 + 2 \sum_{0,r}^{q}$$

eine Formel, welche von Eule